

## 第一章 移动荷载动力分析简史

当列车以一定速度通过桥梁时，桥梁要产生振动。从车辆动力学的角度来看，铁路机车或车辆是由车体、转向架、轮对以及相互联系的两系弹簧所组成（图 1—1）。当列车在线路上运行时，由于机车的振动、轮轨间的蛇行运动以及路基变形等影响，车体、转向架及轮对要产生竖向及横向振动。列车带着这种初始振动状态进入桥梁，在桥梁上，车体、转向架、轮轨以及桥梁结构一起构成一个综合的动力体系。

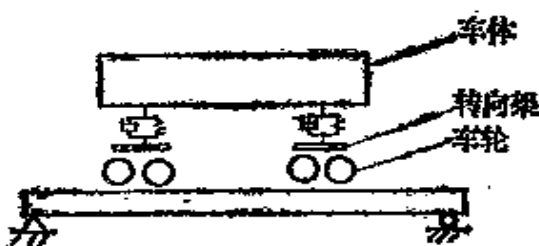


图 1—1 铁路车辆动力  
分析图式

列车过桥引起振动的原因可以归结为几个方面：（1）机车动力作用，如蒸汽机车动轮偏心块的动力作用；（2）轮轨相互作用，如轨面不平顺以及轮轨间蛇行运动；（3）移动荷载对桥跨结构所产生的振动。

关于工程结构的振动问题，远在一百多年前（即铁道工程出现以前）就曾被人们所注意。18世纪下半叶，欧拉（L·Euler）曾对梁的横向振动进行过研究，他分析了悬臂、简支以及固端等各种不同边界条件梁的横向振动，提出梁的横向振动自振频率计算公式如下：

$$f = m \sqrt{\frac{\pi^4 c g}{w l^4}} \quad (1-1)$$

式中  $w$  —— 梁单位长度重量；

$g$  ——重力加速度；

$l$  ——跨度；

$m$  ——根据两端支点条件而确定的常数。

限于当时的理论及技术水平，欧拉只能断定式中  $c$  的因次是力乘长度的平方，没有进一步得出正确的答案。

### （一）现场实测

1825年，英国第一条铁路建成。随着铁道工程的发展，提出了关于移动荷载对桥梁结构的动力作用问题。当时的工程技术界，对这个问题有两种不同的看法：一种认为，与静荷载相比，移动荷载会对桥梁结构带来一个附加的冲击作用；另一种则认为，当车辆高速通过桥梁时，移动荷载可能没有充分时间能下垂到桥梁挠度那么大，因此动挠度可能小于静挠度。

为了研究这个问题，当时英国的铁路建筑物铁料利用研究委员会，在朴茨茅斯造船厂组织了一次动荷载试验。从这次试验中得出的结果是，动荷载所引起的挠度和应力比静荷载作用大。在此应当指出，从目前振动测试及理论分析的成果来看，上述第二种意见并非不正确，确实也存在这种可能，即当车辆以高速度通过小跨度桥梁时，由于车体的自振频率比较低，过桥时间又很短，可能在车辆驶过桥梁时，车体正处于平衡位置向上的状态，对桥梁起减载作用，在实际现场试验中反映，确实有这种情况，即由移动荷载所引起的桥梁结构动挠度或动应力比静挠度或静应力小。

十九世纪中叶是铁道工程的初建阶段，这个时期由于火车的速度不快，又因为当时力学理论及试验设备水平比较低，尽管对于移动荷载动力问题做了一些研究工作，但仍然进展不大。

十九世纪末到二十世纪初，资本主义国家的筑路达到高

潮。据统计自1870年到1930年间，世界铁路营业里程由21万km发展到128.3万km，上升达6倍，车速加大，机车的重量也有增加。为了保证交通运输的安全，迫切要求了解关于移动荷载的动力作用问题。然而由于当时的力学理论以及计算技术尚无法作出精确的分析，因此主要工作是现场实测或作一些近似的理论分析。

1907年到1910年间，美国第一次进行了规模比较大的现场实测工作，其中包括21座钢板梁桥（跨度15.24m到30.48m）和24座桁梁桥（跨度超过30.48m），有40种机车，机车重量由104~190t，当时实测车速从16km/h（爬行）到105km/h，个别车次达160km/h。通过这次实测，得出了跨度、车速和冲击作用间的关系，制订了冲击系数曲线（见图1—2），并得出了明确的概念是：对于蒸汽机车来说，移动荷载的动力作用主要是由动轮偏心块的周期力所引起。此外，还有如线路不平顺、轮箍不圆、车辆速度以及桥梁挠度等其它次要因素的影响。

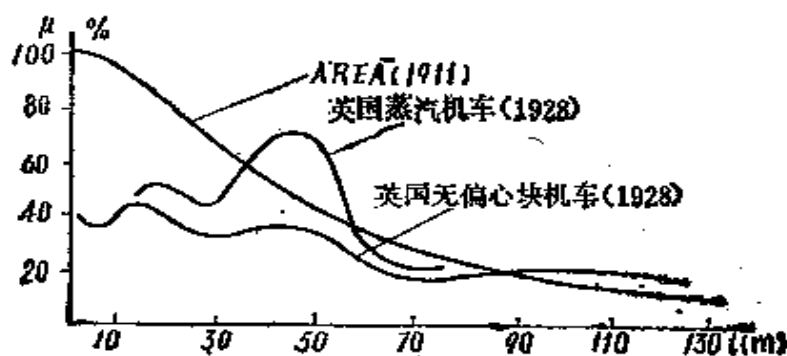


图 1—2 早期的冲击系数曲线

1919年，英国在其本土以及印度、巴基斯坦等地进行了大量的现场测试工作，实测了52座桥梁。这些现场测试工作

的特点除了进行测试外，在英格利斯 (C.E.Inglis) 教授指导下还进行了理论分析研究，因此现场测试工作更加科学化。对于每一座桥梁，除了测量列车在不同车速下桥梁的挠度和应力外，还用测定桥跨结构刚度的办法，判断桥梁的承载能力，用激振器测定桥跨结构的自振频率和加载后的自振频率，并利用列车通过时的自由振动振幅衰减来测定阻尼。

根据实测和理论分析，1928年英国提出了两根冲击系数曲线，其中一根适用于蒸汽机车，另一根则适用于无偏心块的机车。这种按冲击原因不同而提出不同冲击系数的做法，现在不少国家的规范中还是这样规定的 (图 1—2)。

1931~1934年间，美国又进行了大量的动载试验。试验是在克利夫兰、芝加哥等铁路线上进行的，总共试验了37座桥梁，跨度由11.73m~165.62m。根据现场测试的结果，并运用了一般理论分析，得出结论是：对于蒸汽机车，是当动轮偏心块的频率与桥梁 (加载后) 自振频率相等时的冲击系数为最大。美国从1935年开始，也将蒸汽机车及其它无偏心块机车分别用两根冲击系数曲线表示。

在1935年制订规范时，由于要考虑活载频率与桥梁自振频率相接近时的共振情况，发现阻尼值对冲击系数的影响很大，因此要求继续进行现场测试工作。

1947年，美国进行了第三次规模比较大的试验，这次现场试验主要是小跨度钢梁，在量测技术上首次采用了电阻应变片，可记录动应力值。

由6.09m~10.36m的小跨度钢梁实测表明，无论蒸汽机车或内燃机车，当车速从0到64km/h时，冲击系数值逐步增大，以后速度再提高，冲击系数值基本上保持不变。

跨度为12.19m~42.68m的钢板梁实测表明，对蒸汽机车，当车速为30~40km/h时是临界速度，冲击系数达到最

大，以后即使车速增大至140km/h，也不可能达到此值。当内燃机车通过时，冲击系数随着速度的增加而增加，直至速度增加到100km/h，以后车速再提高，冲击系数基本上不再增加。

由于采用了电阻应变片，明显地反映出，当列车高速通过时，由于机车的侧滚振动，桥梁结构除了出现竖向振动外，还出现横向弯扭振动。

图1—3表示1905年~1948年间美国铁路桥梁冲击系数与跨度 $l$ 的关系曲线。

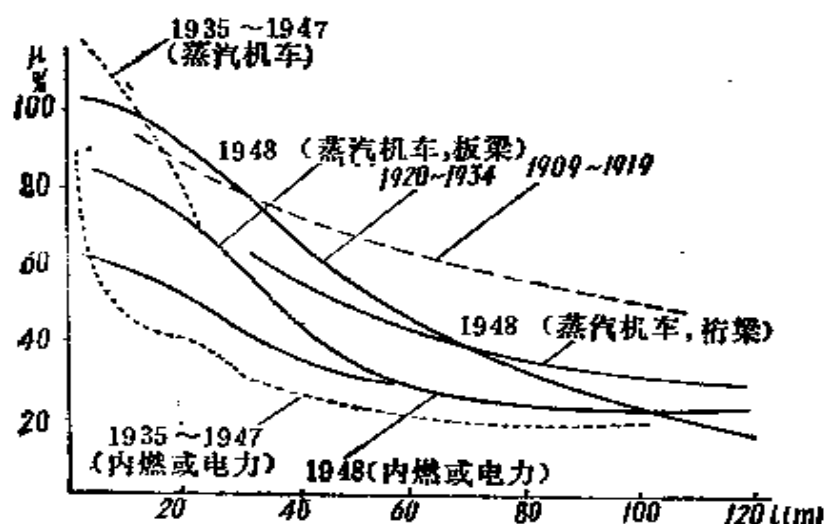


图1—3 美国历年来的冲击系数曲线

苏联对于移动荷载冲击作用的系统研究，是在十月革命后才开始。1919年苏联科学技术委员会，以斯特利列茨基教授 (С.С.Стрелескии) 为首，开始进行桥梁结构动力学研究，于1921年提出钢桥冲击系数计算公式

$$1 + \mu = 1 + \frac{0.625}{1 + 0.02\lambda} \quad (1-2)$$

式中  $\lambda$ ——荷载长度。

以后于1936年，苏联又曾开展对铁路桥跨结构动力学的

试验和理论研究。第二次大战后，由于装配式钢筋混凝土桥大量发展，1953年苏联运输结构物科学研究院，开始对铁路钢筋混凝土桥的动力作用进行研究，在试验室内对100座不同跨度和构造的钢筋混凝土桥进行试验。

## (二) 理论分析

自铁路开始修建起，为适应生产的需要，除了进行现场实测外，关于移动荷载动力作用的理论研究方面，是不断地自简单到复杂、自近似向精确理论改进。

早期的近似理论，主要是分析单个车轮过桥时的动力作用。对这个动力问题，采用下列两种不同的近似假定：第一种假定是不考虑桥梁的本身质量，单考虑轮子的质量；第二种假定则相反，即不计轮子质量，单考虑桥梁的本身质量。

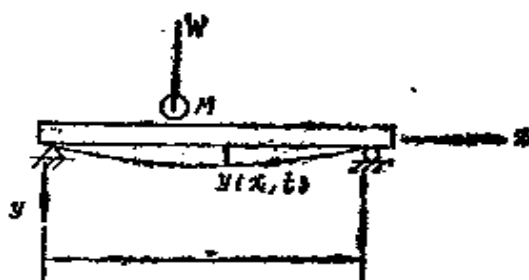


图 1—4 移动荷载过桥

如图 1—4 所示，当移动荷载  $W$  以速度  $v$  过桥时，荷载  $W$  对桥梁所作用的压力  $R$  可表示为：

$$R = Mg - M \frac{d^2 y}{dt^2} \quad (1-3)$$

$$y = y(x, t)$$

上式中  $M$  表示移动荷载的质量，式 (1—3) 右端的第二项表示惯性力。当荷载  $W$  以等速度  $v$  通过桥梁时，式 (1—3) 可进一步表示为：

$$R = Mg - M \left( \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial^2 y}{\partial t \partial x} v + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} v^2 \right) \quad (1-4)$$

1849年，威利斯 (R·Willis) 以第一种假定对上式作了近似解。他把式 (1—4) 近似地表示为：

$$R = Mg \left( 1 - \frac{v^2}{g} \frac{d^2 y}{dx^2} \right) \quad (1-5)$$

利用简支梁挠度公式:

$$y = \frac{Rx^2(l-x)^2}{3lEI} = \frac{x^2(l-x)^2 W}{3lEI} \left( 1 - \frac{v^2}{g} \frac{d^2 y}{dx^2} \right) \quad (1-6)$$

式(1-6)是 $y$ 的变系数微分方程式, 威利斯为取近似解, 将括弧内 $y$ 的两阶导数按下列方式表达。即设:

$$y = \frac{x^2(l-x)^2 W}{3lEI},$$

$$\text{因而 } \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{2W}{3lEI} \cdot (l^2 - 6lx + 6x^2) \quad (1-7)$$

将式(1-7)代入式(1-6), 并取跨中, 可以得到当单轮行至跨中时对梁的压力为:

$$R = W \left( 1 + \frac{16\delta_0 v^2}{gl^2} \right) \quad (1-8)$$

桁  
梁

$$\text{式中 } \delta_0 = \frac{Wl^3}{48EI}$$

同年, 斯托克斯 (G. G. Stokes) 用级数对式(1-6)作了精确解, 并制成了图表。

1905年~1908年, 克雷洛夫 (А. Н. Крылов) 和铁木辛柯 (S. Timonshenko) 分别从后一种假设出发进行分析, 即假定移动荷载的质量比桥梁本身质量小很多, 可以忽略不计。以后, 1922年铁木辛柯又提出了由于机车动轮偏心块冲击作用的分析方法。

既计及桥梁本身质量又考虑活载质量的动力分析是非常复杂的。1937年, 许兰开普 (A. Schallenkamp) 是第一个将两种质量都考虑进去而分析单轮过桥问题的, 他将桥的挠度和车轮的集中荷载都展开为福里哀级数, 然后求系数间相互关

系。

英格利斯于1934年发表的论文《铁路桥梁振动的数学分析》(A mathematical treatise on vibration in railway bridge)，是当时用来解决实际生产设计问题的一篇比较突出的文献。英格利斯根据现场试验(英国1919年)的资料，假定桥梁挠曲线为正弦分布，并作了若干个其它假定，对生产实践中遇到的动力问题作了比较详细的研究，如动轮偏心块的作用，簧上质量问题，轨道不平顺等，他所提出的近似理论解与实测资料对照比较接近。

1953年，符奇尼库夫(B.M. Мучинников)用积分方程方法，纳列茨基维(J.J. Naleszkiewicz)用迦利金(Galerkin)方法，对既考虑桥梁本身质量又考虑活载质量的问题进行了比较严格的分析。

在结构体系方面，除了简支梁外，艾尔(R.S. Ayre)、福特(G. Ford)、库洛基克(ЦКолоичек)等研究了连续梁在移动荷载作用下的动力分析，在分析中均不考虑活载质量，利用连续梁自由振动振型函数来解单轮以及带有周期力的过桥问题。凡坦沙斯(A.S. Vetetsos)，温(R.K. Wen)研究了悬臂梁的动力问题，文中不考虑活载质量，假定恒载集中于几点，取恒载振型曲线来分析。从研究结果表明，一般悬臂梁的挠度或应力冲击系数要比简支梁或连续梁大。

总观自铁道工程开始修建起，至本世纪60年代，在这100多年中，应生产建设的需要，在移动荷载动力分析领域内曾作了不少理论分析，但正如叶夫格拉弗夫(T.K. Еврафов)在《铁路桥跨结构的动力计算》一书序言中所指出的“至1960年，在移动荷载对桥梁结构的动力作用问题上，尚未得到一个精确的解”。



当时分析移动荷载动力问题的基本特点是：没有将车体、轮轨与桥梁三部份当作联合的动力体系，而把车体的质量简单地当成单轮或均布荷载。

### （三）近20年来的发展

本世纪60年代开始，在几个资本主义国家出现了一个新的筑路时期。为了与航空、公路竞争，铁路要向高速化发展，其中如日本，1969年建成时速210km的东海道新干线，法国1978年进行时速260km的高速铁路试验，英、法、西德等国都着手研究高速的地面运输。从铁路运输方面，提出了新的要求，要求解决高速列车过桥的动力分析问题，其中不单是指桥梁结构的动力问题，特别还包括过桥时，车体振动和轮轨相互作用问题的研究。

在计算技术方面，电子计算机的出现，是计算技术领域的一大革命，是提供分析复杂结构以及分析复杂的数学力学问题的有力工具。

由于生产建设的需要及在计算技术方面提供的可能，在这两个前提下，近20年来，在移动荷载动力分析方面有了很大发展，主要表现为如下几个方面：

（1）以车体、轮轨和桥梁三者综合的动力体系为对象，研究当车辆高速过桥时，车体的振幅及加速度（保证司机及旅客的舒适度），研究轮轨间相互作用（保证车轮不出轨的安全度）以及研究桥梁结构的安全及耐久性。

（2）与现场测试相配合，用电子计算机编制程序，进行理论分析。如多轮荷载体系，不同初始条件的影响（桥头线路影响）以及轮轨间蛇行运动等，使移动荷载过桥动力问题逐步从完全依靠实验转化为半实验半理论的阶段。

（3）配合可靠度理论，开始研究用随机理论来分析桥梁结构动力可靠度问题。各国均结合其国内铁路建设（或公

路)的具体情况进行研究。

1957年,比格斯(J.M.Biggs)配合美国高速公路建设,在台式电子计算机上,用单项正弦级数解分析具有簧上质量的单轮过桥问题。经模型以及现场测试(跨度为26.22 m),证明这种计算图式有足够精度,可以用来模拟计算单辆汽车过桥问题。

1960年,温(R.K.Wen)用能量法以及拉格兰奇(Lagrange)方程研究了双轴车辆(汽车)的过桥问题(图1—5),他假定动力挠曲线的形状与静力挠曲线相似,文中还讨论了路面不平顺的影响。

温是第一个研究多轴移动车辆过桥动力问题的人,以往都是从单轮或用均布荷载来模拟移动车辆的。

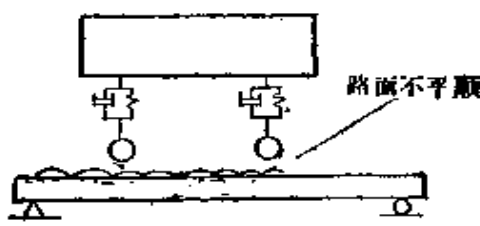
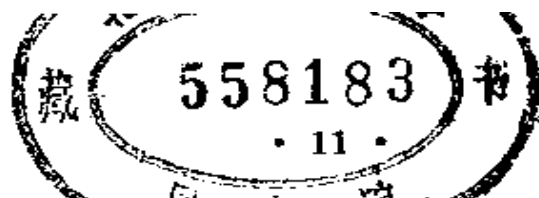


图1—5 双轴车过桥

日本于五十年代末,结合东海道以及东北新干线的修建,对高速列车过桥的动力问题作了大量的理论研究、现场测试及模型试验。日本铁道技术研究所松浦章夫、伊藤文人、大羊地三<sup>[9][10][11]</sup>等人,结合东海道新干线上所采用的电动车组以及正在拟制的超高速磁浮列车,对铁路车辆和桥梁的动力作用进行研究。从他们的理论分析中表明,在车速为200km/h范围内,桥梁的冲击系数一般不超过目前蒸汽机车的冲击系数值。这个现象,在实际桥梁现场测定中也得到证实,因此日本国铁建造物设计标准中所列冲击系数值基本上还是按老规定。松浦章夫从理论分析表明:如车速超过300km/h,则桥梁的冲击系数将随着车速的增加明显地增大。

松浦章夫还对桥梁的刚度值进行了研究,以多孔简支梁



为研究对象，发现当车辆高速通过桥梁时，由于相邻桥梁结构下挠，在桥墩处钢轨表面出现转折角，引起车体竖向加速度以及使轴重产生变化。根据这个现象，松浦章夫认为应按不同的车速规定桥梁的容许最大挠度值。

具体数值如下：

$$\text{当车速 } v = 160 \text{ km/h,} \quad \text{容许挠度 } f \leq \frac{l}{1000}$$

$$\text{当车速 } v = 210 \text{ km/h,} \quad \text{容许挠度 } f \leq \frac{l}{1400}$$

$$\text{当车速 } v = 260 \text{ km/h,} \quad \text{容许挠度 } f \leq \frac{l}{1800}$$

在日本国铁建造物设计标准中规定，对于普通线路桥梁容许最大挠度为  $\frac{l}{1000}$ ，对于高速铁路则为  $\frac{l}{1800}$ 。

欧洲，国际铁路联盟试验研究所（ORE）对铁路桥梁的动力性能作了大量研究，把冲击系数表示为与车速以及线路不平顺有关的函数公式。至于桥梁刚度值，当车速超过 200 km/h 时，最大容许值规定如下：

$$\text{桥梁垂直挠度 } f \leq l/800$$

$$\text{桥梁端部转角不大于 } 1/200$$

$$\text{水平挠度 } f < l/4000$$

$$\text{桥梁歪斜应小于 } 1 \text{ mm/m}$$

由于移动荷载所引起的桥梁振动大都是属于随机的（如轨道不平顺、轮箍不圆，轴重不一致、轮轨间蛇行），因此，为了进一步从动力可靠度来定出桥梁结构的安全及列车通过的舒适度，近年来开始研究用随机振动理论来分析移动荷载下的桥梁振动问题。

1968年，诺尔斯（J. K. Knowles）研究了无穹长梁上作用一集中力，当集中力的位置为随机分布时的动力问题。

同年，弗拉巴 (L. Fryba) 研究了两种情况：第一种情况是当桥梁全长上作用有均布的活载，振动质量随时间不变，在这种情况下，如活荷载是属于平稳随机过程，则桥梁挠度也是属于平稳随机过程。第二种情况是不计活载质量的单轮过桥，在这种情况下，桥梁挠度是轮重位置(时间  $t$ ) 的函数，因此，即使轮重是属于平稳随机过程，桥梁挠度也不再属于平稳随机过程。

1967年，山田善一用随机分析理论，研究公路桥的冲击系数。在他的研究中，假定桥梁的挠度为单波正弦函数，车辆在跨中（活载质量不变动），路面不平顺的功率谱密度为

$$s = a \Omega^{-n},$$

在上述假定情况下，他得出桥梁和车体随机振动的相关函数及均方差，并建议桥梁的冲击系数如下：

$$l > 15\text{m} \quad 1 + \mu = 1 + 6/l$$

$$l \leq 15\text{m} \quad 1 + \mu = 1.4$$

1982年，美国依里诺理工学院朱光汉 (K. H. Chu) 教授<sup>(1)</sup>在随机振动研究中，用下列函数表示轨面不平顺随机函数的谱密度：

$$s(\Omega) = \frac{2\pi A_s \Omega_c^2}{(\Omega^2 + \Omega_c^2) \Omega^2}$$

式中  $\Omega$  表示频率， $A_s$  和  $\Omega_c$  均表示与线路养护条件有关的常数。

在解动力方程中，朱教授利用计算机模拟轨面不平顺随机函数及逐步推进法解车体和桥梁振动位移和加速度。应当指出，这是列车过桥时桥梁结构随机振动分析的很大改进，从一般的简单定性分析进入了定量指标。

近 20 年来，随着电子计算机的出现，对于在列车通过时，桥梁结构的动力分析有了较大的发展。目前，对车体和

桥梁结构竖向振动的研究比较多，对引起竖向振动的各种因素（如车速、动轮偏心块、轮轨不平顺等）也比较清楚。然而，由于影响桥梁振动的因素大都是随机性的，振动理论只能提出结构振动的基本规律，要真正按可靠度理论来解决结构设计问题，还必须作大量现场实测。

此外，当列车通过时，对于车体和桥梁结构横向振动（或称为空间振动）的研究目前还很少，对于各种影响振动的因素（如轮轨间的蛇行运动、线路不平顺等）还不清楚。

随着若干新体系的出现（如斜拉桥、斜腿刚构桥、闭口箱梁），它们的动力性能也待进一步分析研究。

## 第二章 梁的自由振动

### 第一节 单跨梁自由振动的动力平衡方程

本节讨论单跨梁在铅垂平面内的自由振动。如图 2—1 所示梁，为了一般化，暂不明确梁的两端支承条件。在铅垂平面内，选取直角坐标  $x-y$ ，使  $x$  轴与梁轴线重合，零点在梁的左端， $y$  轴向下为正并为截面对称轴。

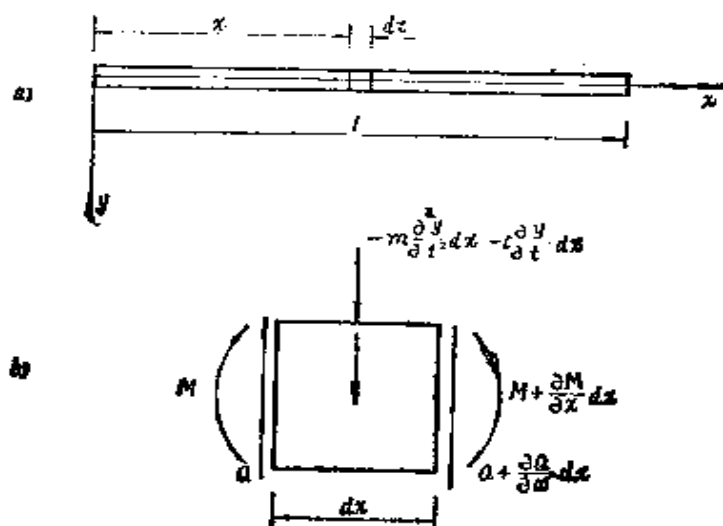


图 2—1 梁的自由振动

基本假定如下：

- (1) 在弹性限度内，梁的变形微小。
- (2) 仅考虑弯曲变形，忽略剪切变形影响。
- (3) 阻尼与速度成正比。

单跨梁是一个无穷自由度的振动体系，沿梁长截取  $dx$

梁段 (图 2-1 b)，在这个梁段上作用有下列力：

质量惯性力：  $m dx \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$

阻尼力：  $c dx \cdot \frac{\partial y}{\partial t} = 2m\omega_b \frac{\partial y}{\partial t}$

截面内力：  $M, Q$

其中  $m$  —— 梁单位长度的质量；

$c$  —— 阻尼系数；

$\omega_b$  —— 阻尼特性系数。

由  $dx$  梁段的动力平衡，可得：

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - 2m\omega_b \frac{\partial y}{\partial t} = 0$$

又根据材料力学中有关梁受弯的内力和变形关系式：

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( -EJ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)$$

式中  $EJ$  为梁的抗弯刚度。

将上式代入前式，可以得出单跨梁自由振动的动力平衡方程为：

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EJ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + 2m\omega_b \frac{\partial y}{\partial t} = 0 \quad (2-1)$$

式 (2-1) 是一个偏微分方程式，对于这个方程式可以用分离变量法求解。

即令  $y(x, t) = X(x) \cdot T(t) \quad (2-2)$

式中：  $X(x)$  —— 仅与  $x$  有关的函数；

$T(t)$  —— 仅与  $t$  有关的函数。

将式 (2-2) 代入式 (2-1) 后，可得：

$$T \cdot \frac{d^2}{dx^2} \left( EJ \frac{d^2 X}{dx^2} \right) + mX \frac{d^2 T}{dt^2} + 2m\omega_b X \frac{dT}{dt} = 0$$

$$\text{即} \quad \frac{1}{mX} \cdot \frac{d^2}{dx^2} \left( EJ \frac{d^2 X}{dx^2} \right) = -\frac{1}{T} \left( \frac{d^2 T}{dt^2} + 2\omega_0 \frac{dT}{dt} \right) \quad (2-3)$$

上式右边与  $x$  无关, 仅为  $t$  的函数, 而左边与  $t$  无关, 仅为  $x$  的函数, 因此上式成立的条件为左右两边应同时等于一个与  $x$  及  $t$  均无关的常数  $\omega^2$ 。

$$\text{即:} \quad \frac{d^2}{dx^2} \left( EJ \frac{d^2 X}{dx^2} \right) - m\omega^2 X = 0 \quad (2-4)$$

$$\frac{d^2 T}{dt^2} + 2\omega_0 \frac{dT}{dt} + \omega^2 T = 0 \quad (2-5)$$

由此可见, 通过分离变量, 偏微分方程式 (2-1) 可分离为上面两个常微分方程式。其中式 (2-5) 的解可以表示为:

$$T = A e^{-\omega_0 t} \cdot \sin(\omega_c t + \varphi_c)$$

$$\text{式中} \quad \omega_c = \sqrt{\omega^2 - \omega_0^2} \quad (2-6)$$

式 (2-6) 中  $\omega_c < \omega$ , 即弱阻尼条件下给出的结果\*。  
 $\omega_0$  为弱阻尼条件下, 梁的自由振动圆频率,  $\omega$  为无阻尼 ( $\omega_0 = 0$ ) 的条件下, 梁的自由振动圆频率。相应的自由振动频率为:

$$\begin{aligned} f &= \omega / 2\pi \\ f_0 &= \omega_0 / 2\pi \end{aligned} \quad (2-7)$$

相应的自由振动周期为:

$$\begin{aligned} T &= 1/f = 2\pi/\omega \\ T_0 &= 1/f_0 = 2\pi/\omega_0 \end{aligned} \quad (2-8)$$

对于等截面梁, 即  $m$  和  $EJ$  均为常数, 则式 (2-4) 的解可以表示为:

$$X = c_1 \cosh kx + c_2 \sinh kx + c_3 \cos kx + c_4 \sin kx \quad (2-9)$$

---

\* 一般工程结构都是处在弱阻尼条件下的振动。



式中  $k = \sqrt[3]{m\omega^2/EJ}$  (2-10)

式(2-9)表示梁在自由振动时的轴线挠曲形式,称为主振型曲线或主振型函数,式中 $c_1$ 、 $c_2$ 、 $c_3$ 和 $c_4$ 都为积分常数,由边界条件确定。

## 第二节 等截面单跨梁的自振频率 及主振型函数

### (一) 简支梁

在自由振动时,其边界条件为:

$$\text{当 } x=0, \quad \text{则 } X=0; \quad M=0$$

$$\text{当 } x=l, \quad \text{则 } X=0; \quad M=0$$

将上列边界条件代入式(2-9),可以得出:

$$0 = c_1 + c_3$$

$$0 = k^2(c_1 - c_3)$$

$$0 = c_2 \operatorname{sh} kl + c_4 \sin kl$$

$$0 = k^2(c_2 \operatorname{sh} kl - c_4 \sin kl)$$

解上式,并且注意到 $k^2$ 不等于零,则可以得出,

$$c_1 = c_2 = c_3 = 0$$

$$c_4 \sin kl = 0 \quad (2-11)$$

由于 $c_4 \neq 0$ ,否则梁处于无振动状态,因此等截面简支梁自由振动频率方程为:

$$\sin kl = 0$$

即  $k = i\pi/l \quad (i=1, 2, \dots)$  (2-12)

将上式代入式(2-10)中,可得自由振动频率

$$\omega_i = \left(\frac{i\pi}{l}\right)^2 \sqrt{\frac{EJ}{m}} \quad (i=1, 2, \dots)$$

$$(2-13)$$

将式(2-11)所得常数代入式(2-9),可得主振

型函数

$$X_i = c_i \sin \frac{i\pi x}{l} \quad (i=1, 2, \dots) \quad (2-14)$$

其中  $X_1$  及  $X_2$  于图 2-2 中所示。

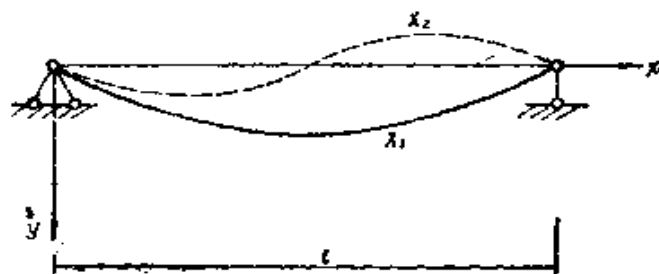


图 2-2 简支梁主振型  $X_1$  及  $X_2$

## (二) 悬臂梁

在自由振动时，其边界条件为：

$$\text{当 } x=0, \quad \text{则 } X=0; \quad \frac{dX}{dx} = 0$$

$$\text{当 } x=l, \quad \text{则 } M=0; \quad Q=0$$

将上列边界条件代入式 (2-9)，可以得出：

$$0 = c_1 + c_3$$

$$0 = k(c_2 + c_4)$$

$$0 = k^2(c_1 \operatorname{ch} kl + c_2 \operatorname{sh} kl - c_3 \cos kl - c_4 \sin kl)$$

$$0 = k^3(c_1 \operatorname{sh} kl + c_2 \operatorname{ch} kl + c_3 \sin kl - c_4 \cos kl)$$

解上式，并且注意到  $k \neq 0$ ，则可以得出：

$$c_2 = -\frac{\operatorname{ch} kl + \cos kl}{\operatorname{sh} kl + \sin kl} c_1,$$





$$c_3 = -c_1$$

$$c_4 = -c_2 = \frac{\operatorname{sh} kl - \sin kl}{\operatorname{ch} kl + \cos kl} c_1 \quad (2-15)$$

化简后，可以得出等截面悬臂梁自由振动频率方程为：

$$\frac{\operatorname{ch} kl + \cos kl}{\operatorname{sh} kl + \sin kl} = \frac{\operatorname{sh} kl - \sin kl}{\operatorname{ch} kl + \cos kl}$$

表 2-1

单跨梁	边界条件	积分常数方程式	积分常数	频率方程	$kl$	$\omega l^2 \sqrt{m/EI}$
	$x=0, X=0$ $X'=0, X''=0$ $x=l, X=0$ $X'=0, X''=0$	$c_1 + c_3 = 0$ $c_2 + c_4 = 0$ $c_1(\text{sh}kl + c_4 \sin kl) = 0$ $c_2(\text{sh}kl - c_4 \sin kl) = 0$	$c_1 = c_3 = c_4 = 0$	$\sin kl = 0$	1 $\pi$ 2 $2\pi$ 3 $3\pi$	$\pi^2$ $4\pi^2$ $9\pi^2$
	$x=0, X=0$ $X'=0, X''=0$ $x=l, X=0$ $X'=0, X''=0$	$c_1 + c_3 = 0$ $c_2 + c_4 = 0$ $c_1(\text{ch}kl + \cos kl) = 0$ $+ c_2(\text{sh}kl + \sin kl) = 0$ $c_1(\text{sh}kl - \sin kl) = 0$ $+ c_2(\text{ch}kl + \cos kl) = 0$	$c_1 \frac{\text{sh}kl + \sin kl}{\text{ch}kl + \cos kl} = -c_2$ $c_3 = -c_4$ $c_1 = -c_2$ $c_3 = -c_4$	$\cos kl \cdot \text{ch} kl + 1 = 0$	1 1.875 2 4.694 3 7.855	3.516 22.035 61.701
	$x=0, X=0$ $X'=0, X''=0$ $x=l, X=0$ $X'=0, X''=0$	$c_1 + c_3 = 0$ $c_2 + c_4 = 0$ $c_1(\text{sh}kl - \cos kl) = 0$ $+ c_2(\text{sh}kl - \sin kl) = 0$ $c_1(\text{sh}kl + \sin kl) = 0$ $+ c_2(\text{ch}kl - \cos kl) = 0$	$c_1 \frac{\text{sh}kl - \sin kl}{\text{ch}kl - \cos kl} = -c_2$ $c_3 = -c_4$ $c_1 = -c_2$ $c_3 = -c_4$	$\cos kl \cdot \text{ch} kl - 1 = 0$	1 4.730 2 7.853 3 10.996	22.370 61.670 120.912
	$x=0, X=0$ $X'=0, X''=0$ $x=l, X=0$ $X'=0, X''=0$	$c_1 + c_3 = 0$ $c_2 + c_4 = 0$ $c_1(\text{ch}kl - \cos kl) = 0$ $+ c_2(\text{sh}kl - \sin kl) = 0$ $c_1(\text{ch}kl + \cos kl) = 0$ $+ c_2(\text{sh}kl + \sin kl) = 0$	$c_1 \frac{\text{sh}kl - \sin kl}{\text{ch}kl - \cos kl} = -c_2$ $c_3 = -c_4$ $c_1 = -c_2$ $c_3 = -c_4$	$\text{th} kl \cdot \text{tg} kl = 0$	1 3.927 2 7.069	15.421 49.964

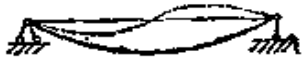
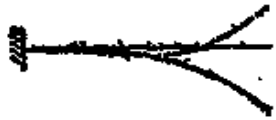
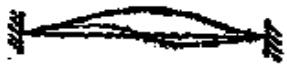

振 型	振 型 方 程
	$X = c_1 \operatorname{ch} kx + c_2 \operatorname{sh} kx + c_3 \cos kx + c_4 \sin kx$
	$X = c_4 \sin kx$
	$X = c_2 [-\phi_1(kl) (\operatorname{ch} kx - \cos kx) + (\operatorname{sh} kx - \sin kx)]$ $\phi_1(kl) = (\operatorname{sh} kl + \sin kl) / (\operatorname{ch} kl + \cos kl)$
	$X = c_2 [-\phi_2(kl) (\operatorname{ch} kx - \cos kx) + (\operatorname{sh} kx - \sin kx)]$ $\phi_2(kl) = (\operatorname{sh} kl - \sin kl) / (\operatorname{ch} kl - \cos kl)$
	$X = c_2 [-\phi_2(kl) (\operatorname{ch} kx - \cos kx) + (\operatorname{sh} kx - \sin kx)]$ $\phi_2(kl) = (\operatorname{sh} kl - \sin kl) / (\operatorname{ch} kl - \cos kl)$

表 2-2

各种频率的振型方程		
$(kl)_r$		$X_r$
1	$\frac{\pi}{2}$	$X_1 = c_2 \sin \frac{\pi x}{l}$
2	$2\pi$	$X_2 = c_2 \sin \frac{2\pi x}{l}$
1	1.875	$X_1 = \left[ -1.3622 \left( \operatorname{ch} \frac{1.875x}{l} - \cos \frac{1.875x}{l} \right) + \left( \operatorname{sh} \frac{1.875x}{l} - \sin \frac{1.875x}{l} \right) \right] c_2$
2	4.694	$X_2 = \left[ -0.9818 \left( \operatorname{ch} \frac{4.694x}{l} - \cos \frac{4.694x}{l} \right) + \left( \operatorname{sh} \frac{4.694x}{l} - \sin \frac{4.694x}{l} \right) \right] c_2$
3	7.855	$X_3 = \left[ -1.00077 \left( \operatorname{ch} \frac{7.855x}{l} - \cos \frac{7.855x}{l} \right) + \left( \operatorname{sh} \frac{7.855x}{l} - \sin \frac{7.855x}{l} \right) \right] c_2$
1	4.730	$X_1 = \left[ -1.0177 \left( \operatorname{ch} \frac{4.730x}{l} - \cos \frac{4.730x}{l} \right) + \left( \operatorname{sh} \frac{4.730x}{l} - \sin \frac{4.730x}{l} \right) \right] c_2$
2	7.853	$X_2 = \left[ -0.9992 \left( \operatorname{ch} \frac{7.853x}{l} - \cos \frac{7.853x}{l} \right) + \left( \operatorname{sh} \frac{7.853x}{l} - \sin \frac{7.853x}{l} \right) \right] c_2$
3	10.996	
1	3.927	$X_1 = \left[ -0.99914 \left( \operatorname{ch} \frac{3.927x}{l} - \cos \frac{3.927x}{l} \right) + \left( \operatorname{sh} \frac{3.927x}{l} - \sin \frac{3.927x}{l} \right) \right] c_2$
2	7.067	$X_2 = \left[ -1.000006 \left( \operatorname{ch} \frac{7.067x}{l} - \cos \frac{7.067x}{l} \right) + \left( \operatorname{sh} \frac{7.067x}{l} - \sin \frac{7.067x}{l} \right) \right] c_2$

即  $\text{ch } kl \cdot \cos kl + 1 = 0 \quad (2-16)$

上式是一个超越方程式，通过试算，可以找出最小的两个根为：

$$(kl)_1 = 1.875; \quad (kl)_2 = 4.694$$

相应的最低频率为：

$$\omega_1 = \frac{3.516}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{m}}$$

$$\omega_2 = \frac{22.035}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{m}}$$

将式 (2-15) 中常数代入式 (2-9) 中，可得等截面悬臂梁主振型函数：

$$X = c_2 [-\phi_1(kl)(\text{ch } kx - \cos kx) + (\text{sh } kx - \sin kx)] \quad (2-17)$$

式中  $\phi_1(kl) = \frac{\text{sh } kl + \sin kl}{\text{ch } kl + \cos kl}$

按不同的  $kl$  值代入以上两式，即可得出等截面悬臂梁相应于不同自振频率的主振型函数。相应于第一和第二个频率的主振型曲线  $X_1$  及  $X_2$  可以参见图 2-3。

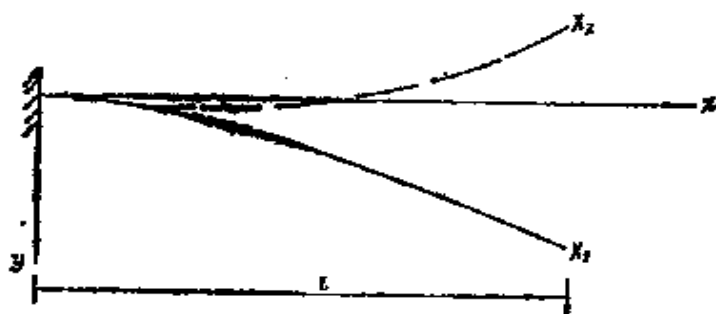


图 2-3 悬臂梁主振型  $X_1$  及  $X_2$

在表 2-1 及 2-2 中列出四种常见等截面梁的自振频率，主振型函数以及主振型曲线。

### 第三节 单跨梁主振型函数的正交性

对于变截面梁,若不计阻尼,则式(2-3)可以表示为:

$$\frac{1}{mX} \cdot \frac{d^2}{dx^2} \left( EJ \frac{d^2 X}{dx^2} \right) = -\frac{1}{T} \frac{d^2 T}{dt^2} \quad (2-18)$$

相应地,式(2-4)及(2-5)可以表示为:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( EJ \frac{d^2 X}{dx^2} \right) - m\omega^2 X = 0 \quad (2-19)$$

$$\frac{d^2 T}{dt^2} + \omega^2 T = 0 \quad (2-20)$$

式(2-20)的解为:

$$T = A \sin(\omega t + \varphi) \quad (2-21)$$

式中 $A$ 及 $\varphi$ 为积分常数,由初始条件决定。因此,根据式(2-2),相应于第 $i$ 个自振频率时,梁的振动曲线为:

$$y_i = X_i A_i \sin(\omega_i t + \varphi_i) \quad (2-22)$$

梁上分布的惯性力为:

$$-m \frac{\partial^2 y_i}{\partial t^2} = m \omega_i^2 X_i A_i \sin(\omega_i t + \varphi_i) \quad (2-23)$$

将惯性力视为外荷载,对于两个不同的自振频率 $\omega_i$ 及 $\omega_j$ ,即对于第 $i$ 及第 $j$ 两个不同的主振型 $X_i$ 及 $X_j$ ,由功的互等定理(E. Betti定理),可列出下式:

$$\int_0^l y_i \left( -m \frac{\partial^2 y_j}{\partial t^2} \right) dx = \int_0^l y_j \left( -m \frac{\partial^2 y_i}{\partial t^2} \right) dx$$

将式(2-22)及(2-23)代入上式,并注意足标变换,简化后有:

$$(\omega_i^2 - \omega_j^2) \int_0^l X_i m X_j dx = 0$$

当 $\omega_i \neq \omega_j$ 时,可得出两个主振型函数的正交性,即

$$\int_0^l X_i m X_j dx = 0 \quad (2-24)$$

此外，上述变截面梁主振型函数的正交性，还可以进一步推导如下，按式（2—19）有：

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( EJ \frac{d^2 X_i}{dx^2} \right) - m \omega_i^2 X_i = 0$$

即 
$$m X_i = \frac{1}{\omega_i^2} \cdot \frac{d^2}{dx^2} \left( EJ \frac{d^2 X_i}{dx^2} \right)$$

将上式代入式（2—24），并考虑  $\omega_i^2 \neq 0$ ，则有

$$\int_0^l X_j \frac{d^2}{dx^2} \left( EJ \frac{d^2 X_i}{dx^2} \right) dx = 0 \quad (2-25)$$

即 
$$\begin{aligned} & \int_0^l X_j \frac{d^2}{dx^2} \left( EJ \frac{d^2 X_i}{dx^2} \right) dx \\ &= X_j \frac{d}{dx} \left( EJ \frac{d^2 X_i}{dx^2} \right) \Big|_0^l - \frac{dX_j}{dx} EJ \frac{d^2 X_i}{dx^2} \Big|_0^l \\ &+ \int_0^l \frac{d^2 X_j}{dx^2} EJ \frac{d^2 X_i}{dx^2} dx = 0 \end{aligned}$$

上式前两项中  $\frac{d}{dx} \left( EJ \frac{d^2 X_i}{dx^2} \right)$  及  $EJ \frac{d^2 X_i}{dx^2}$  应取相应于第  $i$  个主振型曲线，梁端部的剪力及弯矩； $X_j$  及  $\frac{dX_j}{dx}$  应取相应于第  $j$  个主振型曲线，梁端部的位移及转角。对于一般固定端，铰支端或自由端，上式前两项均为零。故有：

$$\int_0^l \frac{dX_j}{dx} \cdot \frac{d}{dx} \left( EJ \frac{d^2 X_i}{dx^2} \right) dx = 0 \quad (2-26)$$

$$\int_0^l \frac{d^2 X_j}{dx^2} EJ \frac{d^2 X_i}{dx^2} dx = 0 \quad (2-27)$$

式（2—24）及（2—25），（2—26），（2—27）为变截面梁主振型正交条件的几种表达式。

#### 第四节 当有活载质量时梁的自振频率

当梁上作用有活载重时，由于活载质量（ $am$ ）参予振动，因此梁的自振频率与无活载时的不同。下面首先引出梁



的两端点位移和边界力的一般表达式，再讨论有活载时梁的自振频率。

### (一) 等截面梁的边界位移和边界力的表达式

在图 2—4 中，表示梁在自由振动时，两端点处的位移及内力。对于等截面梁，根据变形式 (2—9)，可以得出常数  $c_1, c_2, c_3, c_4$  和边界位移间的关系式，即由式 (2—9) 可以得：

$$\frac{dX}{dx} = k(c_1 \operatorname{sh} kx + c_2 \operatorname{ch} kx - c_3 \sin kx + c_4 \cos kx) \quad (2-28)$$

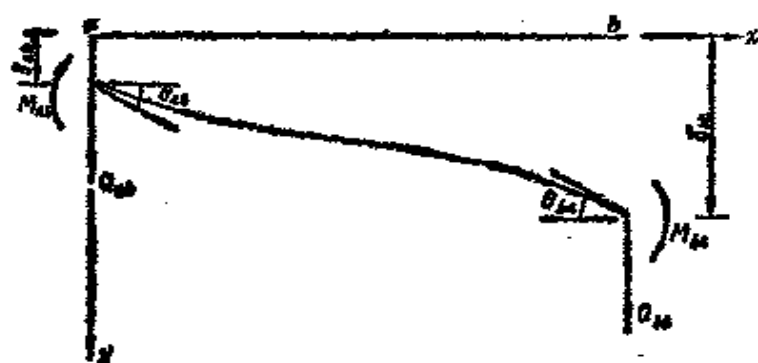


图 2—4 梁变形及内力关系

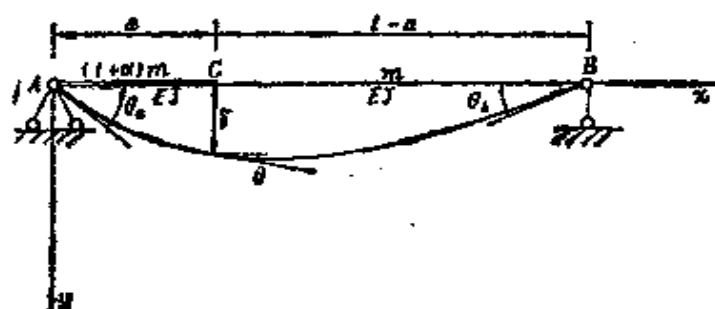


图 2—5 考虑活载梁的自由振动

令  $kl = \lambda$ ，则有：

当  $x = 0$ , 则  $X = \delta_{ab}$ , 即  $c_1 + c_3 = \delta_{ab}$

当  $x = 0$ , 则  $\frac{dX}{dx} = \theta_{ab}$ , 即  $c_2 + c_4 = \theta_{ab}/k$

当  $x = l$ , 则  $X = \delta_{ba}$ ,

即  $c_1 \operatorname{ch} \lambda + c_2 \operatorname{sh} \lambda + c_3 \cos \lambda + c_4 \sin \lambda = \delta_{ba}$

当  $x = l$ , 则  $\frac{dX}{dx} = \theta_{ba}$ ,

即  $c_1 \operatorname{sh} \lambda + c_2 \operatorname{ch} \lambda - c_3 \sin \lambda + c_4 \cos \lambda = \theta_{ba}/k$

(2-29)

由上式联立可以解得:

$$\left. \begin{aligned} c_1 &= \frac{1}{2} \frac{l}{\lambda^2} \left[ F_4(\lambda) \frac{\delta_{ab}}{l} - F_2(\lambda) \theta_{ab} + F_3(\lambda) \frac{\delta_{ba}}{l} - F_1(\lambda) \theta_{ba} \right] + \frac{1}{2} \delta_{ab} \\ c_2 &= \frac{1}{2} \frac{l}{\lambda^3} \left[ F_6(\lambda) \frac{\delta_{ab}}{l} - F_4(\lambda) \theta_{ab} + F_5(\lambda) \frac{\delta_{ba}}{l} + F_3(\lambda) \theta_{ba} \right] + \frac{l}{2\lambda} \theta_{ab} \\ c_3 &= \frac{1}{2} \delta_{ab} - \frac{1}{2} \frac{l}{\lambda^2} \left[ F_4(\lambda) \frac{\delta_{ab}}{l} - F_2(\lambda) \theta_{ab} + F_3(\lambda) \frac{\delta_{ba}}{l} - F_1(\lambda) \theta_{ba} \right] \\ c_4 &= \frac{l}{2\lambda} \theta_{ab} - \frac{1}{2} \frac{l}{\lambda^3} \left[ F_6(\lambda) \frac{\delta_{ab}}{l} - F_4(\lambda) \theta_{ab} + F_5(\lambda) \frac{\delta_{ba}}{l} + F_3(\lambda) \theta_{ba} \right] \end{aligned} \right\}$$

(2-30)

式中  $F_1(\lambda) \sim F_6(\lambda)$  见表 2-3

上式 (2-30) 表示用两端边界位移, 表达梁振型曲线中的泛常数  $c_1, c_2, c_3$  和  $c_4$ 。当梁的边界位移条件确定后, 可由上式求出梁的振型曲线。

其次，利用材料力学中梁的内力和变形关系式：

$$M = -EJ \frac{d^2 X}{dx^2} \quad (2-31)$$

及  $Q = -EJ \frac{d^3 X}{dx^3} \quad (2-32)$

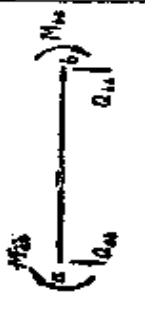






可进一步得出，梁在自由振动时，边界力和边界位移间的关系式如下：

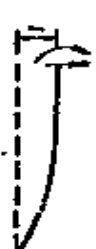
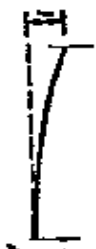

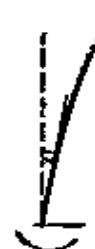



表 2—8

$F_1(\lambda) = -\lambda(\operatorname{sh}\lambda - \sin\lambda)/\psi$
$F_2(\lambda) = -\lambda(\operatorname{ch}\lambda \cdot \sin\lambda - \operatorname{sh}\lambda \cdot \cos\lambda)/\psi$
$F_3(\lambda) = -\lambda^2(\operatorname{ch}\lambda - \cos\lambda)/\psi$
$F_4(\lambda) = \lambda^2 \operatorname{sh}\lambda \cdot \sin\lambda/\psi$
$F_5(\lambda) = \lambda^2(\operatorname{sh}\lambda + \sin\lambda)/\psi$
$F_6(\lambda) = -\lambda^2(\operatorname{ch}\lambda \cdot \sin\lambda + \operatorname{sh}\lambda \cdot \cos\lambda)/\psi$
$F_7(\lambda) = 2\lambda \operatorname{sh}\lambda \cdot \sin\lambda/\phi$
$F_8(\lambda) = \lambda^2(\operatorname{sh}\lambda + \sin\lambda)/\phi$
$F_9(\lambda) = -\lambda^2(\operatorname{ch}\lambda \cdot \sin\lambda + \operatorname{sh}\lambda \cdot \cos\lambda)/\phi$
$F_{10}(\lambda) = -\lambda^3(\operatorname{ch}\lambda + \cos\lambda)/\phi$
$F_{11}(\lambda) = \lambda^3 \cdot 2\operatorname{ch}\lambda \cos\lambda/\phi$
$F_{12}(\lambda) = \lambda^3(\operatorname{ch}\lambda \cdot \cos\lambda + 1)/\phi$
$F_{13}(\lambda) = -\lambda^3(\operatorname{sh}\lambda - \sin\lambda)/2\operatorname{sh}\lambda \cdot \sin\lambda$
$F_{14}(\lambda) = -\lambda^3(\operatorname{ch}\lambda \cdot \sin\lambda - \operatorname{sh}\lambda \cdot \cos\lambda)/2\operatorname{sh}\lambda \cdot \sin\lambda$
$F_{15}(\lambda) = -\lambda(\operatorname{ch}\lambda \cdot \sin\lambda - \operatorname{sh}\lambda \cdot \cos\lambda)/(\operatorname{ch}\lambda \cdot \cos\lambda + 1)$
$F_{16}(\lambda) = \lambda^2 \cdot \operatorname{sh}\lambda \cdot \sin\lambda/(\operatorname{ch}\lambda \cdot \cos\lambda + 1)$
$F_{17}(\lambda) = -\lambda^2(\operatorname{ch}\lambda \cdot \sin\lambda + \operatorname{sh}\lambda \cdot \cos\lambda)/(\operatorname{ch}\lambda \cdot \cos\lambda + 1)$

注：式中  $\psi = \operatorname{ch}\lambda \cdot \cos\lambda - 1$ ； $\phi = \operatorname{ch}\lambda \cdot \sin\lambda - \operatorname{sh}\lambda \cdot \cos\lambda$ 。

表 2-4

	$\lambda = \sqrt[4]{\frac{\mu l^4}{EI}} \sqrt{\omega} \quad \omega = \sqrt{\lambda^4 \frac{EI}{l^4 \mu}} = \lambda^4 \sqrt{\frac{EI}{\mu l^4}}$			
	$M_{11}$	$M_{12}$	$Q_{11}$	$Q_{12}$
	$\frac{EI}{l} F_3(\lambda)$	$\frac{EI}{l} F_4(\lambda)$	$\frac{EI}{l^3} F_9(\lambda)$	$-\frac{EI}{l^3} F_8(\lambda)$
	$-\frac{EI}{l^3} F_3(\lambda)$	$\frac{EI}{l^3} F_4(\lambda)$	$\frac{EI}{l^3} F_9(\lambda)$	$\frac{EI}{l^3} F_8(\lambda)$
	$\frac{EI}{l} F_7(\lambda)$		$-\frac{EI}{l^3} F_8(\lambda)$	$-\frac{EI}{l^3} F_9(\lambda)$
		$\frac{EI}{l} F_7(\lambda)$	$\frac{EI}{l^3} F_8(\lambda)$	$\frac{EI}{l^3} F_9(\lambda)$
	$-\frac{EI}{l^3} F_8(\lambda)$		$\frac{EI}{l^3} F_{11}(\lambda)$	$\frac{EI}{l^3} F_{12}(\lambda)$

		$\frac{EJ}{l^3} F_0(\lambda)$	$\frac{EJ}{l^3} F_{10}(\lambda)$	$\frac{EJ}{l^3} F_{11}(\lambda)$
	$-\frac{EJ}{l^3} F_1(\lambda)$		$\frac{EJ}{l^3} F_{10}(\lambda)$	$\frac{EJ}{l^3} F_{12}(\lambda)$
		$\frac{EJ}{l^3} F_2(\lambda)$	$\frac{EJ}{l^3} F_{13}(\lambda)$	$\frac{EJ}{l^3} F_{14}(\lambda)$
	$\frac{EJ}{l} F_{10}(\lambda)$		$-\frac{EJ}{l^3} F_{10}(\lambda)$	
		$\frac{EJ}{l} F_{10}(\lambda)$		$\frac{EJ}{l^3} F_{10}(\lambda)$
		$\frac{EJ}{l^3} F_{10}(\lambda)$		$\frac{EJ}{l^3} F_{10}(\lambda)$
	$-\frac{EJ}{l^3} F_{10}(\lambda)$		$\frac{EJ}{l^3} F_{13}(\lambda)$	

$$M_{ab} = \frac{EJ}{l} \left[ F_1(\lambda)\theta_{ba} + F_2(\lambda)\theta_{ab} - F_3(\lambda)\frac{\delta_{ba}}{l} - F_4(\lambda)\frac{\delta_{ab}}{l} \right] \quad (2-33)$$

$$Q_{ab} = -\frac{EJ}{l^2} \left[ F_3(\lambda)\theta_{ba} - F_4(\lambda)\theta_{ab} + F_5(\lambda)\frac{\delta_{ba}}{l} + F_6(\lambda)\frac{\delta_{ab}}{l} \right] \quad (2-34)$$

$$M_{ba} = -\frac{EJ}{l} \left[ F_1(\lambda)\theta_{ab} + F_2(\lambda)\theta_{ba} + F_3(\lambda)\frac{\delta_{ab}}{l} + F_4(\lambda)\frac{\delta_{ba}}{l} \right] \quad (2-35)$$

$$Q_{ba} = -\frac{EJ}{l^2} \left[ F_3(\lambda)\theta_{ab} - F_4(\lambda)\theta_{ba} - F_5(\lambda)\frac{\delta_{ab}}{l} - F_6(\lambda)\frac{\delta_{ba}}{l} \right] \quad (2-36)$$

式(2-30)以及(2-33)~(2-36)能适用于任何边界条件的等截面梁。在表(2-3)及(2-4)中,表示各种常用情况下的表达式及相应函数 $F(\lambda)$ 表达式。

## (二) 考虑活载质量时梁的自振频率计算

在图2-5中,表示作用有活载的等截面简支梁,梁的自重质量为 $m$ ,活载作用长度为 $a$ ,活载质量为 $am$ ,将梁分成左段( $a$ )及右段( $l-a$ )两部分,分别列出边界位移和边界力的关系式。

(1) 对于左段梁,梁的质量为 $(1+\alpha)m$ ,两端边界内力条件为:

$$(a) \quad x=0, \quad -EJ\frac{d^2X}{dx^2}=0,$$

由式(2-33)即:

$$0 = \frac{EJ}{a} \left[ F_1(\lambda_1)\theta + F_2(\lambda_1)\theta_c - F_3(\lambda_1)\frac{\delta}{a} \right]$$

式中  $\lambda_1 = k_1 a = \sqrt[4]{\frac{(1+\alpha)m\omega^2}{EJ}} a$  (2-37)

$$(b) \quad x = a, \quad -EJ \frac{d^2 X}{dx^2} = M_c,$$

由式 (2-35) 即:

$$M_c = -\frac{EJ}{a} F_7(\lambda_1)\theta - \frac{EJ}{a^2} F_9(\lambda_1)\delta \quad (2-38)$$

$$(c) \quad x = a, \quad -EJ \frac{d^3 X}{dx^3} = Q_c,$$

由式 (2-36) 即:

$$Q_c = \frac{EJ}{a^2} F_9(\lambda_1)\theta + \frac{EJ}{a^3} F_{11}(\lambda_1)\delta \quad (2-39)$$

(2) 对于右段梁, 梁的质量为  $m$ , 与上述左段梁相似, 可由两端边界内力条件得出:

$$0 = \frac{EJ}{l-a} \left[ F_1(\lambda_2)\theta + F_2(\lambda_2)\theta_c + F_3(\lambda_2)\frac{\delta}{l-a} \right] \quad (2-40)$$

$$M_c = \frac{EJ}{l-a} F_7(\lambda_2)\theta - \frac{EJ}{(l-a)^2} F_9(\lambda_2)\delta \quad (2-41)$$

$$Q_c = \frac{EJ}{(l-a)^2} F_9(\lambda_2)\theta - \frac{EJ}{(l-a)^3} F_{11}(\lambda_2)\delta \quad (2-42)$$

式中  $\lambda_2 = k_2(l-a) = \sqrt[4]{\frac{m\omega^2}{EJ}}(l-a)$

由于左段与右段在  $c$  截面处内力与位移相同, 因此由式 (2-38) 至 (2-42) 可得出如下齐次方程:

$$\left. \begin{aligned} \left[ -\frac{F_7(\lambda_1)}{a} + \frac{F_7(\lambda_2)}{l-a} \right] \theta + \left[ \frac{F_8(\lambda_1)}{a^2} - \frac{F_8(\lambda_2)}{(l-a)^2} \right] \delta &= 0 \\ \left[ \frac{F_8(\lambda_1)}{a^2} - \frac{F_8(\lambda_2)}{(l-a)^2} \right] \theta + \left[ \frac{F_{11}(\lambda_1)}{a^3} + \frac{F_{11}(\lambda_2)}{(l-a)^3} \right] \delta &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2-43)$$

梁在自由振动过程中， $\theta$  及  $\delta$  不恒等于零，因此可以从上列两式中得出频率方程为：

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{F_8(\lambda_1)}{a^2} - \frac{F_8(\lambda_2)}{(l-a)^2} \right]^2 - \left[ \frac{F_7(\lambda_1)}{a} + \frac{F_7(\lambda_2)}{l-a} \right] \\ & \cdot \left[ \frac{F_{11}(\lambda_1)}{a^3} + \frac{F_{11}(\lambda_2)}{(l-a)^3} \right] = 0 \end{aligned} \quad (2-44)$$

可由试算法解上式，得出自振频率值。

例如：当  $a=l/2$ ， $\alpha=1$  则有

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \sqrt[4]{\frac{2m\omega^2}{EJ}} \cdot \frac{l}{2} \\ \lambda_2 &= \sqrt[4]{\frac{m\omega^2}{EJ}} \cdot \frac{l}{2} = \lambda_1/1.189 \end{aligned}$$

通过试算法解频率方程 (2-44)，可以得出满足该式的最小根为：

$$\lambda_2 = 1.418$$

相应的最低自振频率为：

$$\omega = \lambda_2^2 \cdot \frac{4}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{m}} = \frac{8.05}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{m}}$$



## 第三章 梁式桥的 竖向自振频率和阻尼值

### 第一节 梁式桥的竖向自振频率

对于简支的钢筋混凝土梁桥或预应力混凝土梁桥，桥梁的竖向自振频率（第一基频）可以直接由式（2—13）计算。

$$\left. \begin{aligned} \omega &= \left( \frac{\pi}{l} \right)^2 \sqrt{\frac{EJ}{m}} \\ \text{或 } f &= \frac{\pi}{2l^2} \sqrt{\frac{EJ}{m}} \end{aligned} \right\} \quad (3-1)$$

式中  $EJ$  —— 桥梁抗弯刚度

$m$  —— 单位长度桥梁的自重（包括道床及人行道）质量

图 3—1 中表示铁路低高度钢筋混凝土梁（参标桥 1024 号）以及预应力混凝土梁（参标桥 2018, 2019）的竖向自振频率计算值。由于混凝土标号和弹性模量的差别，实测桥梁的自振频率与计算值略有差别。

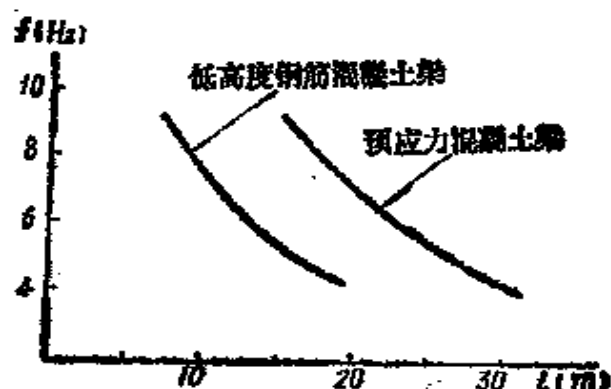


图 3—1 铁路低高度钢筋混凝土梁  
及预应力混凝土梁的竖向自振频率

要精确地计算一座钢桁梁的竖向自振频率是比较繁琐的，因为桁梁杆件在节点处是刚性结合，桥道梁和联结系又参与主桁梁共同工作，并且轨道和支座对桁梁变

形有约束作用，这些因素又不能完全由理论分析来求出。因此，通常是基于理论分析和现场实测资料相结合，采用所谓半理论半经验的方法求桁梁的自振频率。

### (一) 理论公式

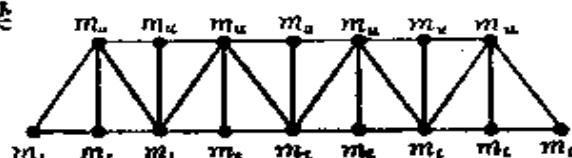


图 3—2 钢桁梁动力学计算图式

如图 3—2 所示钢桁梁，将桥梁自重质量集中于各节点处，即简化为有限自由度体系。由于桥道梁及轨道的重量，一般在桥道平面处的节点质量要大于非桥道平面处节点质量。按杆件系统有限单元法列出各节点位移总体刚度矩阵  $[K]$  以及质量矩阵  $[M]$ 。由于阻尼对结构自振频率的影响不大，可以忽略，因此可得出自振频率方程为：

$$[K]\{U\} + [M]\{\ddot{U}\} = 0 \quad (3-2)$$

式中  $\{U\}$  和  $\{\ddot{U}\}$  各表示节点位移和加速度列矩阵，可表示为：

$$\{U\} = \{A\} \sin \omega t \quad (3-3)$$

将式 (3—3) 代入式 (3—2) 中，可得：

$$([K] - [M]\omega^2)\{A\} = 0$$

$$\text{即} \quad [K] - [M]\omega^2 = 0 \quad (3-4)$$

解上列齐次方程组，可得出桁梁桥的竖向自振圆频率  $\omega$  和相应的振型。

在计算刚度矩阵  $[K]$  时，可以认为杆件在节点处是刚接的或铰接的，由于自振频率是与桥梁抗弯刚度的平方根成正比，因此按铰接或刚接所计算的结果差别不大。

### (二) 近似公式：

简支钢桁梁桥的基本体系是一简支梁，如已知桁梁的主要尺寸，可近似地按实腹梁公式 (3—1) 计算竖向自振频率。

设桁梁高为 $h$ ，单位长度静载重为 $p(t/m)$ ，包括冲击系数的活载为 $k(t/m)$ ，则桁梁的竖向抗弯刚度 $EJ$ 可进一步表示为：

$$EJ = E\beta F h^2 = E\beta h^2 \left( \frac{M}{2\varphi h[\sigma]} \right) \\ = \left( \frac{E\beta}{16[\sigma]\varphi} \right) (p+k) h l^2$$

$$\text{即 } f = \frac{\pi}{2} \sqrt{\left( \frac{E\beta g}{16[\sigma]\varphi} \right) \left( \frac{p+k}{p} \right) \frac{h}{l^2}} = \frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{E}{[\sigma]} \left( \frac{p+k}{p} \right) \frac{h}{l^2}} \quad (3-5)$$

其中

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{\beta g}{16\varphi}}$$

$\beta$ ——考虑节点刚性、腹杆变形和桥道梁参与主桁工作等影响的修正系数；

$\varphi$ ——杆件设计折减系数（如压杆翘曲、拉杆扣孔等）

卡才（И.И.Казем）〔8〕曾对50座跨度为33m到110m不同型式的钢桁梁进行了统计分析，对照式（3—5）的计算值与实测值，发现一般 $\alpha$ 值在 $0.8 \sim 1 \text{ sec}/\sqrt{m}$ 之间，建议取： $\alpha = 0.9 \text{ sec}/\sqrt{m}$ 。采用上列 $\alpha$ 值，按卡才的计算，除了个别桥梁计算值与实测值可能相差10%外，一般误差不超过5~7%。

表3—1中以跨度为32m的箱型钢梁及跨度为89.4m的下承桁梁为例，将由公式（3—5）所计算的自振频率与实测值相比较，误差不超过5%。

### （三）经验公式：

根据实测资料汇总，卞希曼（С.А.Бернштейн）等推荐，可以用下列经验公式近似表达简支桁梁的竖向自振频率 $f$ ，即

$$\begin{aligned}
 & f = 10^4 / (47l - 0.1l^2) \\
 \text{或} \quad & f = 10^4 / 39l \quad (l = 5 \sim 70\text{m})
 \end{aligned}
 \quad (3-6)$$

式中,  $l$  为桁梁跨度 (m)

表 3—1

桥梁结构	$l$ (m)	$h$ (m)	$E/$ [ $\sigma$ ]	$(p+k)/p$	计算值 $f = \frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{E}{[\sigma]} \left( \frac{p+k}{p} \right) \left( \frac{k}{l^3} \right)}$ (Hz)	$f$ 实测值 (Hz)
箱型梁	32	2.5	1050	8.55	5.18	5.37
下承桁梁	89.4	15.24	1500	3.08	3.29	3.17~3.28

由于式 (3—6) 中没有考虑梁高、材料和荷载等因素, 因此只能作为一个自振频率  $f$  的近似估算。图 3—3 中表示实测值与经验公式之间的关系。

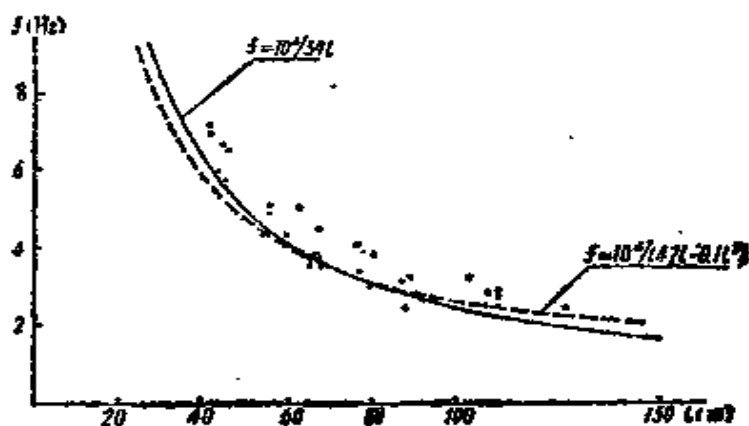


图 3—3 桁梁桥跨度与竖向自振频率之间的关系

## 第二节 阻 尼 值

列车通过桥梁后, 钢桁梁桥处于衰减振动, 其阻尼主要由下列两个因素所引起:

(1) 结构内部非弹性阻力及摩擦: 材料本身在加载和卸载过程中的滞回以及杆件连接处的局部非弹性变形和滑动。

(2) 结构外部的非弹性阻力及摩擦：桥梁支座的摩擦，轨道对桥梁桁架变形的阻尼以及空气阻力。

曾有不少学者对桥梁阻尼进行实测及理论研究，如英格利斯、依里雅西维奇（С.А.Ильясевич）、伊藤学〔6〕等，从他们的研究中可以得出下列有关阻尼的基本规律：

(1) 钢桁梁的衰减振动曲线可以准确地用  $y = y_0 e^{-\delta t}$  来表达，这个结论表明钢桁梁桥的阻尼与速度成正比。

(2) 由于支座以及轨道约束的影响，小跨度桥梁的阻尼值比大跨度桥梁的阻尼值大，而且数值比较分散。

作为近似的阻尼常数  $\delta$  值 ( $\delta = \omega_s / f$ ,  $f$  为桁梁桥自振频率)，有下列几个参考式：

$$\left. \begin{aligned} \delta &= 5 \left( \frac{11}{T^2} - 1 \right) \times 10^{-3} \\ \delta &= \frac{1}{0.3l - 1.2 \times 10^{-3} l^2} \end{aligned} \right\} \quad (3-7)$$

式中  $T$  —— 桥梁自振周期

$l$  —— 跨度 (m)

图 3—4 表示实测阻尼常数  $\delta$  值与上列两式的关系。

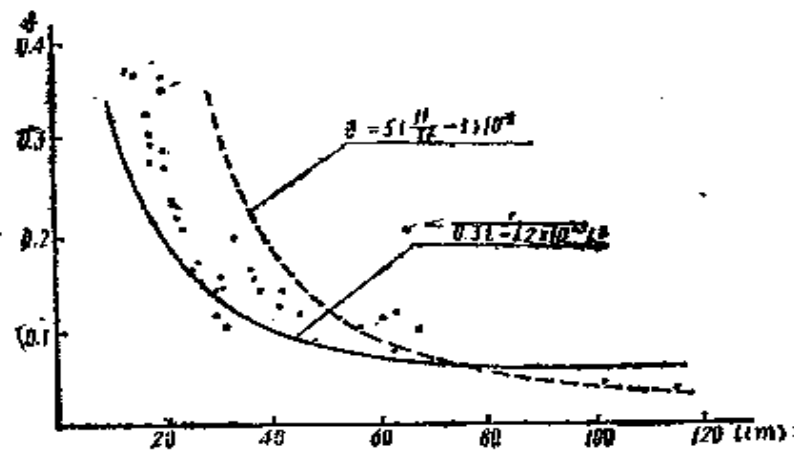


图 3—4 桁梁桥跨度与阻尼常数之间的关系

从图中可见，在中小跨度范围内（20~40m），上列两式与实测值有一定的差别，还应参考现场实测数据。

### 第三节 蒸汽机车过桥时的临界速度

当蒸汽机车过桥时，动轮偏心块对桥梁产生周期性的锤击力，这是引起桥梁振动的主要因素。当锤击力的频率与加载后的桥梁自振频率相符合时，桥梁要产生较大的振动，这时的列车速度称为临界速度。

（一）机车动轮偏心块频率  $f$ ：

设车速为  $v$ ，动轮半径为  $r$ ，则由蒸汽机车动轮偏心块所产生的活载频率  $f$  为：

$$f = \frac{v}{2\pi r} \quad (3-8)$$

如前进型机车：  $r = 0.75\text{m}$

$$\therefore f = 0.212v$$

（二）梁上作用有活载时的自振频率  $\omega_1$

简支梁当跨中弯矩（或挠度）为最大时，活载分布长度约  $0.8l \sim 0.85l$ ，桥梁自振频率  $\omega_1$  可近似地表示为：

$$\omega_1 \cong \sqrt{\frac{m}{m+m_1}} \omega_0 \quad (3-9)$$

上式中  $m$  —— 梁上静载质量

$m_1$  —— 梁上活载质量

$\omega_0$  —— 桥梁无活载时的自振频率

（三）临界速度  $v_k$

当动轮偏心块的频率  $f$  与有活载时梁上的自振频率  $\omega_1$  相符时，机车达到临界速度。

即：  $2\pi f = \omega_1$

由式（3—8）和（3—9）可得：

$$v_K = 0.75 \sqrt{\frac{m}{m+m_1}} \omega_0 \quad (3-10)$$

图 3—5 表示我国铁路桥梁检定规范<sup>[16]</sup>中所列单机过桥时的临界速度。其中建设型机车由于动轮直径比较小 (1370mm)，因此  $v_K$  也小些。按我国蒸汽机车一般速度 (40~80km/h)，一般中等以上跨度桥梁，都以临界速度时的桥梁动力系数作为设计值。

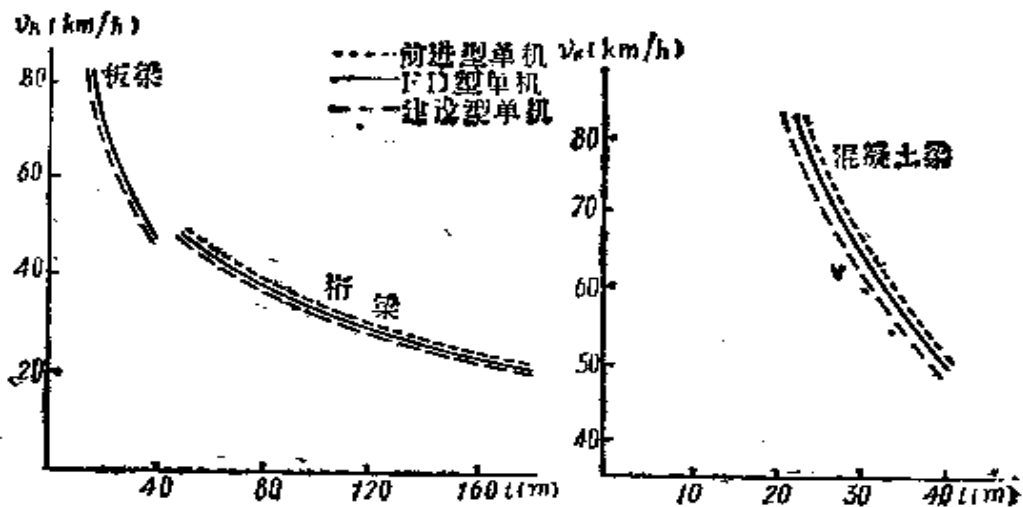


图 3—5 蒸汽机车过桥时的临界速度

## 第四章 单轮过桥振动计算

这一章是介绍移动荷载过桥动力分析的基本方法，讨论单个车轮以及单轮加弹簧过桥时，梁的动力平衡方程及解。首先扼要地介绍不计活载质量的分析，然后叙述考虑活载质量的动力分析。由于考虑活载质量后的动力平衡方程是一个变系数微分方程，因此一般采用数值解。

### 第一节 不计活载质量的移动荷载动力分析

图 4—1 中表示在梁上作用有移动荷载  $q$ ， $q$  的前进速度为  $v$ ， $q$  是  $x$  和  $t$  的函数。与第二章分析梁的自由振动时相似，取  $dx$  梁段，考虑其动力平衡，在这一节中暂不考虑移动荷载  $q$  的质量。

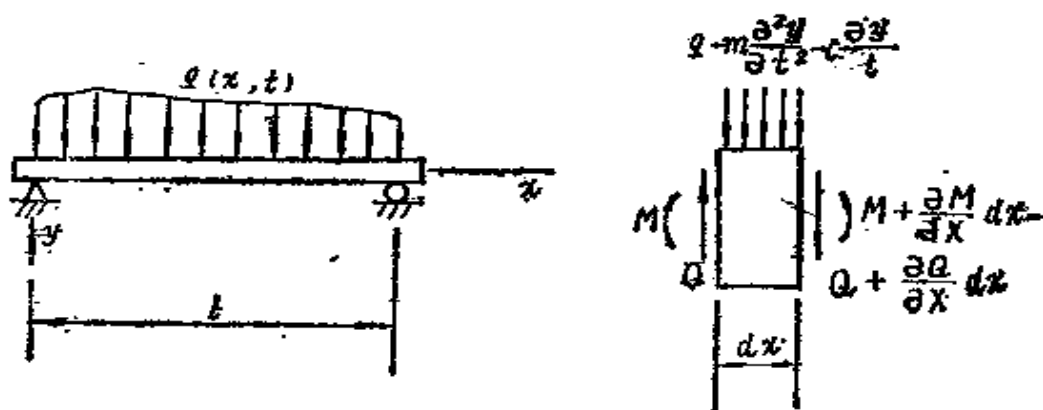


图 4—1 移动荷载作用下梁的振动

$dx$  梁段动力平衡方程为：



$$\frac{\partial Q}{\partial x} - m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - 2m\omega_b \frac{\partial y}{\partial t} + q = 0$$

根据材料力学中有关梁的内力和变形关系式:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( -EJ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)$$

因而梁的强迫振动微分方程为:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EJ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + 2m\omega_b \frac{\partial y}{\partial t} = q \quad (4-1)$$

式(4-1)是一个偏微分方程,可按主振型分解法求解,即令梁的振动轴线方程 $y(x, t)$ 表示为如下形式:

$$y = \sum_{i=1}^{\infty} T_i X_i \quad (4-2)$$

式中 $X_i$ 为主振型函数, $T_i$ 为待求的 $t$ 函数。将上式代入式(4-1),可得:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} T_i \frac{d^2}{dx^2} \left( EJ \frac{d^2 X_i}{dx^2} \right) + m \sum_{i=1}^{\infty} X_i \frac{d^2 T_i}{dt^2} \\ + 2m\omega_b \sum_{i=1}^{\infty} X_i \frac{dT_i}{dt} = q \end{aligned} \quad (4-3)$$

将上式(4-3)乘以第 $j$ 个主振型函数 $X_j$ ,并在全梁长度内沿梁轴线积分,考虑到主振型的正交性,则可得:

$$\begin{aligned} T_j \int_0^l X_j \frac{d^2}{dx^2} \left( EJ \frac{d^2 X_j}{dx^2} \right) dx + \frac{d^2 T_j}{dt^2} \int_0^l X_j m X_j dx \\ + 2\omega_b \frac{dT_j}{dt} \int_0^l X_j m X_j dx = \int_0^l q X_j dx \end{aligned}$$

$$(j = 1, 2, \dots) \quad (4-4)$$

若 $m, EJ, \omega_b, X_j$ 及 $q$ 给定,即可求解上述微分方程式,求出函数 $T_j$ 。

对于等截面简支梁，由式(2-14)可表示 $X_j$ 为如下形式：

$$X_j = \sin \frac{j\pi x}{l} \quad (j=1, 2, \dots) \quad (4-5)$$

将上式代入式(4-4)，可得出 $T_j$ 的微分方程如下：

$$\frac{d^2 T_j}{dt^2} + 2\omega_b \frac{dT_j}{dt} + \omega_j^2 T_j = -\frac{2}{ml} \int_0^l q \sin \frac{j\pi x}{l} dx$$

$$(j=1, 2, \dots) \quad (4-6)$$

式中  $\omega_j = \left(\frac{j\pi}{l}\right)^2 \sqrt{\frac{EJ}{m}}$ ，为等截面简支梁无阻尼的自振圆频率。

以上分析的是任意荷载 $q$ 作用时的通式，对于如图4-2所示以等速度 $v$ 移动的一组集中荷载，则式(4-6)可以表示为：

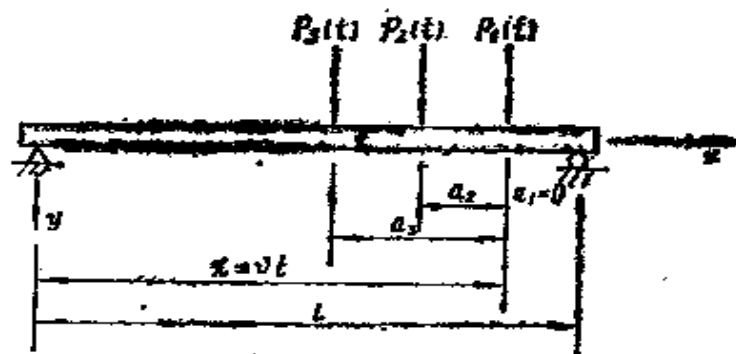


图4-2 一组移动荷载作用下梁的振动

$$\frac{d^2 T_j}{dt^2} + 2\omega_b \frac{dT_j}{dt} + \omega_j^2 T_j = -\frac{2}{ml} \sum_{i=1}^n P_i(t) \cdot \sin \frac{j\pi(vt - a_i)}{l} \quad (j=1, 2, \dots)$$

$$(4-7)$$

下面讨论几种简单情况：

(1) 单个移动荷载 $P(t)$ 作用：

当仅有一个移动荷载 $P(t)$ 作用于梁上时，式(4-7)

可以表示成:

$$\frac{d^2 T_j}{dt^2} + 2\omega_b \frac{dT_j}{dt} + \omega_j^2 T_j = \frac{2P(t)}{ml} \cdot \sin \frac{j\pi vt}{l} \\ (j=1, 2, \dots) \quad (4-8)$$

上式是一个常系数线性微分方程, 其通解为:

$$T_j = e^{-\omega_b t} (c_1 \cos \omega_c t + c_2 \sin \omega_c t) \\ + \frac{2}{ml\omega_c} \int_0^t P(u) \cdot \sin \frac{j\pi vu}{l} \cdot e^{-\omega_b(t-u)} \cdot \sin \omega_c(t-u) du \\ (j=1, 2, \dots) \quad (4-9)$$

式中  $\omega_c = \sqrt{\omega_j^2 - \omega_b^2}$

$c_1$  及  $c_2$  为积分常数, 若初始条件如下:

当  $t=0$  时,  $T_j=0$ ;  $dT_j/dt=0$

则式 (4-9) 成为:

$$T_j = \frac{2}{ml\omega_c} \int_0^t P(u) \cdot \sin \frac{j\pi vu}{l} \cdot e^{-\omega_b(t-u)} \cdot \sin \omega_c(t-u) du \\ (j=1, 2, \dots) \quad (4-10)$$

将上式及式 (4-5) 代入式 (4-2), 则可得单个移动荷载  $P(t)$  作用时等截面简支梁的轴线振动方程为:

$$y = \frac{2}{ml} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_c} \cdot \sin \frac{i\pi x}{l} \\ \int_0^t P(u) \cdot \sin \frac{i\pi vu}{l} \cdot e^{-\omega_b(t-u)} \cdot \sin \omega_c(t-u) \cdot du \\ (4-11)$$

(2) 带有锤击力的单轮荷载作用:

蒸汽机车动轮偏心块所引起的锤击力可用下式表示:

$$P(t) = P \cos \theta t \quad (4-12)$$

代入式 (4-11), 可得:

$$y = \frac{2P}{ml} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_c} \cdot \sin \frac{i\pi x}{l}$$

$$\times \int_0^t \cos \theta u \cdot \sin \frac{i\pi v u}{l} e^{-\omega_b(t-u)} \cdot \sin \omega_c(t-u) du$$

即:

$$\begin{aligned} y = & \frac{2P}{ml} \sum_{i=1}^{\infty} \sin \frac{i\pi x}{l} \left\{ \left[ \frac{\omega_i^2 - (i\omega - \theta)^2}{2B_1} \sin(i\omega - \theta)t \right. \right. \\ & + \frac{\omega_i^2 - (i\omega + \theta)^2}{2B_2} \sin(i\omega + \theta)t \\ & - \frac{\omega_b(i\omega - \theta)}{B_1} \cos(i\omega - \theta)t \\ & - \frac{\omega_b(i\omega + \theta)}{B_2} \cos(i\omega + \theta)t \left. \right] \\ & - \frac{1}{\omega_c} e^{-\omega_b t} \left[ \frac{\omega_c^2 - \omega_b^2 - (i\omega - \theta)^2}{2B_1} (i\omega - \theta) \right. \\ & + \frac{\omega_c^2 - \omega_b^2 - (i\omega + \theta)^2}{2B_2} (i\omega + \theta) \left. \right] \\ & \cdot \sin \omega_c t + \omega_b e^{-\omega_b t} \left[ \frac{i\omega - \theta}{B_1} + \frac{i\omega + \theta}{B_2} \right] \cos \omega_c t \left. \right\} \end{aligned} \quad (4-13)$$

式中  $\omega_i^2 = \frac{EJ}{m} \left( \frac{i\pi}{l} \right)^4$

$$\omega = \pi v / l$$

$$\omega_c^2 = \omega_i^2 - \omega_b^2$$

$$B_1 = [\omega_i^2 - (i\omega - \theta)^2]^2 + 4\omega_b^2(i\omega - \theta)^2$$

$$B_2 = [\omega_i^2 - (i\omega + \theta)^2]^2 + 4\omega_b^2(i\omega + \theta)^2$$

## 第二节 单轮过桥动力分析

实际移动荷载都有一定的质量, 这一部分质量随同桥梁一起振动, 在动力平衡方程中应当考虑其相应的惯性力。

图 4-3 中表示一个质量为  $M_1$  的单轮, 以等速度  $v$  过桥, 相应的动力荷载项可表示为:

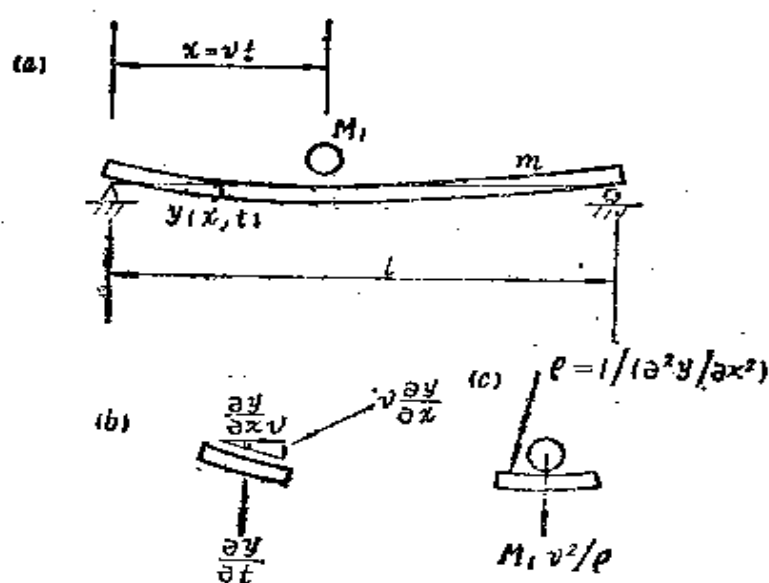


图 4—3 单轮过桥动力图式

$$P_{(t)} = M_1 g - M_1 \left( \frac{d^2 y}{dt^2} \right)_x$$

上式中  $\left( \frac{d^2 y}{dt^2} \right)_x$  是  $\left( \frac{d^2 y}{dt^2} \right)_{x=vt}$  的简写，表示在移动荷载作用点处的两阶导数。由于  $y$  是  $x$  和  $t$  的函数，因此上式可进一步表示为：

$$P_{(t)} = M_1 g - M_1 \left( \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial^2 y}{\partial t \partial x} v + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} v^2 \right) \quad (4-14)$$

式 (4—14) 括弧内各项的物理意义可说明如下：

第一项表示不计荷载位置的变化，在荷载作用点处桥梁下挠的加速度；

第二项表示由于荷载的移动，使荷载竖向速度  $\left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)$  和  $\left( v \frac{\partial y}{\partial x} \right)$  产生变化，由此而引起的竖向加速度 (图 4—3b)；

第三项则表示由于桥梁的曲率 $\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)$ ，活载相当于在竖曲线上移动，由此产生的竖向离心加速度（图4—3c）

式（4—14）括弧内后两项的数值与桥梁的刚度以及车轮通过的速度有关，根据一般铁路桥梁的刚度（限制活载挠度不超过 $l/1000$ ）以及货物列车的速度（40~80km/h），这两项可以忽略不计<sup>[14]</sup>。

由此，当考虑到活载质量时，单轮过桥动力平衡方程为：

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EJ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + 2m\omega_b \frac{\partial y}{\partial t} = \delta(x-vt)M_1 \left( g - \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right) \quad (4-15)$$

上式中 $\delta$ 表示德立克函数（Dirac），其定义为

$$x = vt, \quad \delta = 1$$

$$x \neq vt, \quad \delta = 0$$

对于等截面简支梁，与第一节相似，将 $y$ 表示为：

$$y = \sum_{i=1}^{\infty} T_i \sin \frac{i\pi x}{l} \quad (4-16)$$

代入式（4—15），利用正弦级数的正交性，可得：

$$\ddot{T}_j + 2\omega_b \dot{T}_j + \omega_j^2 T_j = \frac{2M_1}{ml} g \sin j\omega t \left( 1 - \frac{1}{g} \sum_{i=1}^{\infty} \ddot{T}_i \sin i\omega t \right) \quad (j = 1, 2, \dots) \quad (4-17)$$

式中

$$\omega = \pi v / l$$

如在 $y$ 的级数表达式（4—16）中取 $n$ 项，则将同类项合并后，式（4—17）可写成如下矩阵表达式：

$$[A]\{\ddot{T}\} = [B]\{\dot{T}\} + [C]\{T\} + [D] \quad (4-18)$$

式中

$$[A] = \begin{bmatrix} (1 + r \sin^2 \omega t) & r \sin \omega t \sin 2\omega t & \dots & r \sin \omega t \sin n\omega t \\ r \sin \omega t \sin 2\omega t & (1 + r \sin^2 2\omega t) & \dots & r \sin 2\omega t \sin n\omega t \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r \sin \omega t \sin n\omega t & r \sin n\omega t \sin 2\omega t & \dots & (1 + r \sin^2 n\omega t) \end{bmatrix}$$

式中  $A^{-1}$  和  $D$  均为  $t$  的函数矩阵,  $B$  和  $C$  则为常量矩阵。

(2) 确定计算步长  $\Delta t$

$\Delta t$  取得越小, 计算精度越高, 通常可以取相邻两次的计算结果判断, 是否需要进一步缩小计算步长。

(3) 当  $t = 0$  时,

(a) 计算泛常数:  $A^{-1}(0)$  和  $D(0)$

(b) 初始条件:  $T(0)$  和  $\dot{T}(0)$

(4) 将上列泛常数及初始条件代入下式求  $\ddot{T}(0)$ ,

即:

$$\begin{aligned} \ddot{T}(0) = & A^{-1}(0) \times B \times \dot{T}(0) + A^{-1}(0) \times C \\ & \times T(0) + A^{-1}(0) \times D(0) \end{aligned}$$

(5) 用泰劳 (Taylor) 公式向前推进一步

$$\left. \begin{aligned} \dot{T}(\Delta t) &= \dot{T}(0) + \Delta t \ddot{T}(0) \\ T(\Delta t) &= T(0) + \Delta t \dot{T}(0) + \frac{1}{2} \Delta t^2 \ddot{T}(0) \end{aligned} \right\} \quad (4-20)$$

(6) 当  $t = \Delta t$  时,

(a) 计算泛常数:  $A^{-1}(\Delta t)$  和  $D(\Delta t)$

(b) 利用式 (4-20) 得出的函数值  $T(\Delta t)$  和  $\dot{T}(\Delta t)$

(7) 代入式 (4-19) 求  $\ddot{T}(\Delta t)$

.....

重复上列步骤, 可求出  $T_1(t)$ 、 $T_2(t)$ 、...、 $T_n(t)$  函数值。

根据计算经验表明<sup>[14]</sup>, 当计算桥梁跨中动力挠度时,  $y$  的级数[式 (4-16)]可以近似地只取第一项就能满足精度要求。

$$\text{即 } y = T \sin \pi x / l$$

由此, 式 (4-18) 可简化为:



$$\left. \begin{aligned} (1 + r \sin^2 \omega t) \ddot{T} + 2\omega_s \dot{T} + \omega_1^2 T &= r g \sin \omega t \\ \text{即: } \ddot{T} &= C_1 \dot{T} + C_2 T + C_3 \end{aligned} \right\} \quad (4-21)$$

式中

$$\begin{aligned} C_1 &= -2\omega_s / (1 + r \sin^2 \omega t) \\ C_2 &= -\omega_1^2 / (1 + r \sin^2 \omega t) \\ C_3 &= r g \sin \omega t / (1 + r \sin^2 \omega t) \end{aligned}$$

以上介绍的是用泰劳公式逐步推进法解方程组(4-18)，也可以用其它数值解法(第五章)。在一般计算机库过程中，有现成的微分方程数值解过程，可直接调用。下面介绍用基尔(Gill)过程(具体内容见第五章第三节)解式(4-21)的步骤。

基尔过程标识符: GILL(N, H, FCT, BE, Y, K, Q)

形式参数和实参数:  $N = 3$

$H = \Delta t$ ——计算步长

FCT(y, k)过程为:

$$K[1] := 1;$$

$$K[2] := Y[3];$$

$$K[3] := C_1 * Y[3] + C_2 * Y[2] + C_3;$$

式中

$$\begin{aligned} Y[1] &= t, & K[1] &= \dot{Y}[1] = 1 \\ Y[2] &= T[t], & K[2] &= \dot{Y}[2] = \dot{T}(t) \\ Y[3] &= \dot{T}(t) = v, & K[3] &= \dot{Y}[3] = \ddot{T}(t) \\ & & & = \dot{v} \end{aligned}$$

$C_1$ 、 $C_2$ 和 $C_3$ 是式(4-21)中相应的系数，是 $t$ 的已知系数。在附录1列有单轮过桥计算程序，计算框图如下:

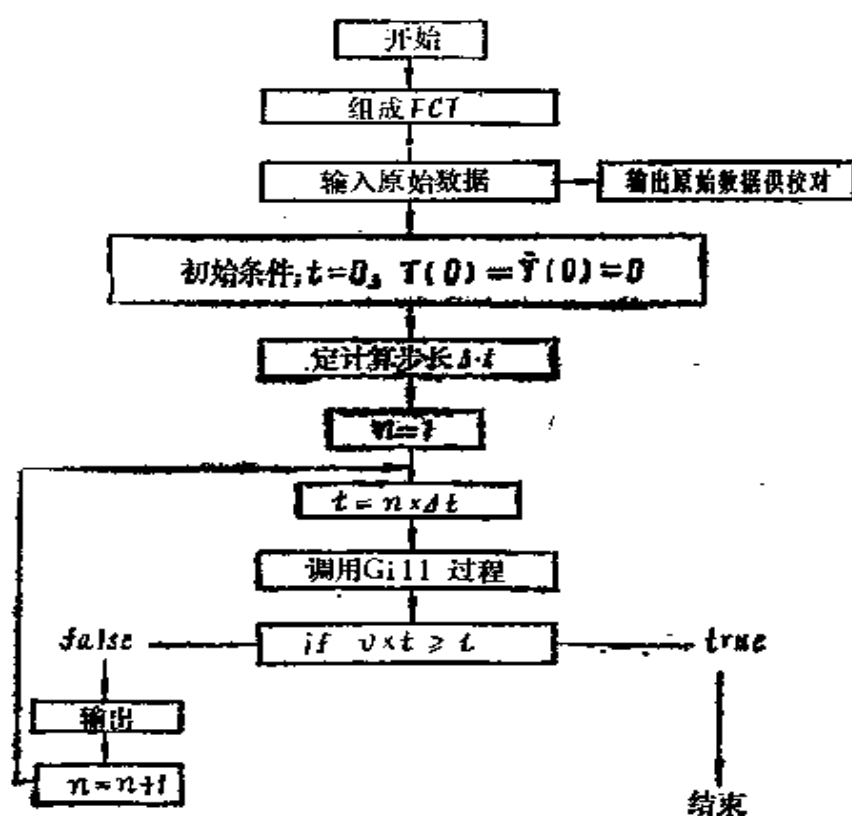


图 4—4 单轮过桥计算框图

### 第三节 单轮并附有弹簧上质量 过桥的动力分析

机车或货物车辆的车厢是由车体、转向架框架以及轮对所组成，相互间设有联系弹簧和阻尼设备。由于弹簧的作用，车体的动力性能与轮对以及转向架框架间的动力性能差别很大，在这一节中要研究一个基本问题，即单个车轮并附有弹簧上质量过桥时的动力分析。

如图 4—5 所示，梁上有移动荷载，该荷载是由弹簧下质量  $M_0$ 、弹簧上质量  $M_1$  以及相互间联系弹簧  $K_0$  和阻尼  $C_0$ 。

所组成。设梁的动挠度为 $y(x, t)$ , 弹簧下质量 $M_0$ 的动挠度为 $y(vt, t)$ , 弹簧上质量的动挠度为 $z(t)$ 。作用在梁上的动力荷载为:

$$P(t) = (M_0 + M_1)g - M_0 \left( \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right)_x - M_1 \left( \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \right)_x$$

代入式(4-8), 可得出梁的动力平衡方程为:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 T_j}{dt^2} + 2\omega_b \frac{dT_j}{dt} + \omega_j^2 T_j = \frac{2}{ml} \sin j\omega t \left[ (M_0 + M_1)g \right. \\ \left. - M_0 \left( \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right)_x - M_1 \left( \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \right)_x \right] \quad (4-22) \\ (j=1, 2, \dots) \end{aligned}$$

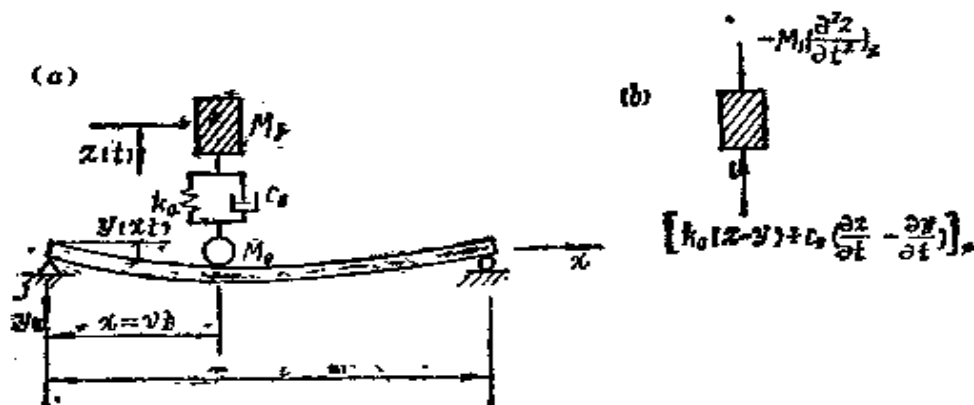


图 4-5 单轮加弹簧过桥的动力分析

根据弹簧上质量 $M_1$ 的平衡(图4-5b), 可以得出又一动力平衡方程为:

$$M_1 \left( \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \right)_x + K_0(z-y)_x + C_0 \left( \frac{\partial z}{\partial t} - \frac{\partial y}{\partial t} \right)_x = 0 \quad (4-23)$$

式(4-22)和式(4-23)是联立微分方程, 可以解未知函数 $T_1$ 、 $T_2$ 、 $\dots$ 和 $z$ 与式(4-20)相似, 如取单项正弦级数解, 即:

$$y = T \sin \pi x / l$$

则式 (4-22) 和式 (4-23) 可写成:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{T} + 2\omega_0 \dot{T} + \omega_1^2 T &= \frac{2}{ml} \sin \omega t [(M_0 + M_1)g - \\ &\quad M_0 \ddot{T} \sin \omega t - M_1 \ddot{z}] \\ M_1 \ddot{z} + K_0(z - T \sin \omega t) + C_0(\dot{z} - \dot{T} \sin \omega t) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4-24)$$

为了使用基尔过程, 将上式进一步改写成:

$$\left. \begin{aligned} \dot{T} &= V \\ \dot{z} &= U \\ \dot{V} &= C_1 U + C_2 V + C_3 z + C_4 T + C_5 \\ \dot{U} &= C_6 U + C_7 V + C_8 z + C_9 T \end{aligned} \right\} \quad (4-25)$$

上式中有关常数为:

$$\begin{aligned} r_0 &= 2M_0/ml & r_1 &= 2M_1/ml \\ K &= K_0/M_1 & C &= C_0/M_1 \\ C_1 &= -Cr_1 r_2 \sin \omega t & C_2 &= (r_1 C \sin \omega t - 2\omega_0) r_1 \\ C_4 &= (K \sin \omega t - \omega_1^2) r_2 & C_5 &= (r_0 + r_1) r_2 g \sin \omega t \\ C_7 &= C \sin \omega t & C_8 &= -K \\ r_2 &= \frac{1}{1 + r_0 \sin^2 \omega t} \\ C_3 &= K r_1 r_2 \\ C_6 &= -C \\ C_9 &= K \sin \omega t \end{aligned}$$

基尔过程中实参数可以表示为:

$$\left. \begin{aligned}
 N &= 5 \\
 H &= \Delta t \\
 K[1] &:= 1 \\
 K[2] &:= Y[4] \\
 K[3] &:= Y[5] \\
 K[4] &:= C_1 Y[5] + C_2 Y[4] + C_3 Y[3] + C_4 Y[2] + C_5 \\
 K[5] &:= C_6 Y[5] + C_7 Y[4] + C_8 Y[3] + C_9 Y[2]
 \end{aligned} \right\}$$

(4-26)

上式中:

$$\begin{aligned}
 Y[1] &= t & K[1] &= \dot{Y}[1] = 1 \\
 Y[2] &= T & K[2] &= \dot{Y}[2] = \dot{T} \\
 Y[3] &= Z & K[3] &= \dot{Y}[3] = \dot{Z} \\
 Y[4] &= \dot{T} = V & K[4] &= \dot{Y}[4] = \ddot{T} = \ddot{V} \\
 Y[5] &= \dot{Z} = \bar{U} & K[5] &= \dot{Y}[5] = \ddot{Z} = \ddot{U}
 \end{aligned}$$

#### 第四节 单轮过桥算例

对于小跨度桥梁,当一只转向架在跨中时,常常是最不利荷载位置,因此在这一节中以小跨度桥梁的数据作为计算对象,讨论单轮过桥动力分析。

(一) 桥梁及荷载:

(1) 桥跨结构:跨度为16m,梁的抗弯刚度 $EJ$ 、质量 $m$ 及阻尼系数 $\omega_b$ 如下:

$$EJ = 2.05 \times 10^{10} \text{ N} \cdot \text{m}^2$$

$$m = 9.36 \times 10^3 \text{ kg/m (包括道碴、轨道及桥梁本身等质量)}$$

$$\omega_b = 0.454 \text{ 1/sec}$$

根据式(3-1),桥梁的自振频率为:

$$\omega_1 = \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \sqrt{\frac{EJ}{m}} = (\pi^2/16^2) \sqrt{2.05 \times 10^{10}/9.36 \times 10^3}$$

$$= 57.1$$

$$f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = 9.09 \text{ Hz}$$

(2) 荷载: 相当于单个转向架加一半车体的质量

$$M_1 = 6.38 \times 10^4 \text{ kg}$$

(3) 车速: 60、100和160km/h三种

(二) 动力平衡方程及计算过程:

(1) 动力平衡方程: 取单项正弦级数解

$$y = T \sin(\pi x/l)$$

式(4-21)中有关常数可计算如下:

$$r = 2M_1/ml = 2 \times 6.38 \times 10^4 / 9.36 \times 10^3 \times 16 = 0.852$$

当车速为60km/h时:  $\omega = \pi v/l = \pi \times 60/16 \times 3.6$

$$= 3.27 \text{ 1/sec}$$

当车速为160km/h时:  $\omega = \pi v/l = \pi \times 160/16 \times 3.6$

$$= 8.72 \text{ 1/sec}$$

$$C_1 = -2\omega_0/(1+r\sin^2\omega t) = -0.908$$

$$/(1+0.852\sin^2 3.27t)$$

$$C_2 = -\omega_1^2/(1+r\sin^2\omega t) = -3260/$$

$$(1+0.852\sin^2\omega t)$$

$$C_3 = r g \sin\omega t/(1+r\sin^2\omega t) = 8.36$$

$$\sin 3.27t/(1+0.852\sin^2 3.27t)$$

(2) 基尔过程:

$$N = 3$$

$$H = \Delta t = 0.001 \sim 0.002 \text{ sec}$$

FCt(y, k)过程为:

$$K[1] := 1$$

$$K[2] := Y[3]$$

$$K[3] := (-0.908Y[3] - 3260Y[2] + 8.36\sin 3.27t) / (1 + 0.852\sin^2 3.27t)$$

(三) 计算成果:

将上列基尔过程代入附录 1 中单轮过桥计算程序, 可得计算结果如下:

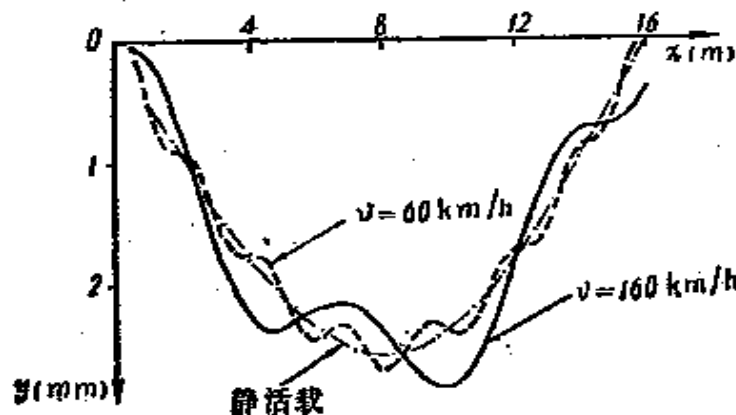


图 4—6 跨中挠度

图 4—6 中表示当单轮以速度为 60km/h 和 160km/h 过桥时, 桥梁跨中挠度变化规律。图中虚线是表示静止活载的挠度线, 活载挠度曲线以一定的频率围绕静止活载挠度线波动。

当车速为 60km/h 时, 单轮经过全桥的时间为:

$$T_0 = l/v = 16 / (60/3.6) = 0.96 \text{ sec}$$

如按桥梁自振频率( $f_1$ ), 在  $T_0$  时间内应出现振动波数为:

$$n = 0.96 \times 9.09 = 8.7$$

实际上在图 4—6 中, 当车速以 60km/h 过桥时, 跨中挠度振动的波数为 7.5 波, 这是由于活载质量参与振动, 使振动频率略有降低。

表 4—1 中列出不同车速时的跨中挠度最大值, 从表中

可见，跨中挠度将随着车速的提高而增大（见表4—1中2.72mm与2.88mm）。

表4—1

车速 (km/h)	跨中挠度最大值 (mm)			活载竖向挠度最大值 (mm)			活载加速度最大值 (mm/sec <sup>2</sup> )	
	静活载	单轮	单轮加弹簧	单轮	单轮加轮簧		单轮	单轮加弹簧 簧上部分
					簧下	簧上		
60	2.80	2.72	2.62	2.72	2.62	3.07	275	79
160	2.60	2.88	2.92	2.88	2.88	2.64	900	447

图4—7中表示移动荷载的竖向加速度，这个图可与后面单轮加弹簧的成果相对照。

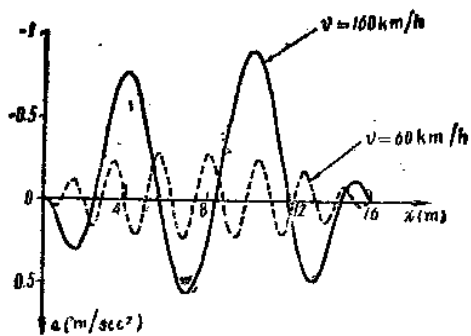


图4—7 移动荷载的竖向加速度

## 第五节 单轮并附有弹簧上 质量过桥的算例

### （一）桥梁及荷载：

桥跨结构的刚度、质量以及阻尼系数同上算例。其中荷



载区分为弹簧上质量和弹簧下质量两部分，弹簧下质量相当于转向架的质量，弹簧上质量相当于车体质量之半。

簧上质量： $M_1 = 4.69 \times 10^4 \text{ kg}$

簧下质量： $M_0 = 1.69 \times 10^4 \text{ kg}$

弹簧刚度： $K_0 = 4.87 \times 10^6 \text{ N/m}$

阻尼系数： $C_0 = 3.14 \times 10^5 \text{ Nsec/m}$

(二) 动力平衡方程及计算过程：

动力平衡方程：取单项正弦级数解

$$y = T \sin(\pi x/l)$$

式(4-26)中有关常数可以计算如下：

$$r_0 = 2M_0/ml = 2 \times 1.69 \times 10^4 / 9.36 \times 10^3 \times 16 = 0.225$$

$$r_1 = 2M_1/ml = 2 \times 4.69 \times 10^4 / 9.36 \times 10^3 \times 16 = 0.626$$

$$K = K_0/M_1 = 4.87 \times 10^6 / 4.69 \times 10^4 = 103.8 \text{ 1/sec}^2$$

$$C = C_0/M_1 = 3.14 \times 10^5 / 4.69 \times 10^4 = 6.69 \text{ 1/sec}$$

当车速为60km/h时：

$$r_2 = 1/(1 + r_0 \sin^2 \omega t) = 1/(1 + 0.225 \sin^2 3.27t)$$

$$C_1 = -Cr_1 r_2 \sin \omega t = -4.19/(1 + 0.225 \sin^2 3.27t)$$

$$C_2 = (r_1 C \sin \omega t - 2\omega_b) r_2 = (4.19 \sin 3.27t - 0.908) / (1 + 0.225 \sin^2 3.27t)$$

$$C_3 = Kr_1 r_2 = 65.05/(1 + 0.225 \sin^2 3.27t)$$

$$C_4 = (K \sin \omega t - \omega_1^2) r_2 = (103.75 \sin 3.27t - 3260) / (1 + 0.225 \sin^2 3.27t)$$

$$C_5 = (r_0 + r_1) r_2 g \sin \omega t = 8.36 \sin 3.27t / (1 + 0.225 \sin^2 3.27t)$$

$$C_6 = -C = -6.69$$

$$C_7 = C \sin \omega t = 6.69 \sin 3.27t$$

$$C_8 = -K = -103.8$$

$$C_9 = K \sin \omega t = 103.8 \sin 3.27t$$

### (三) 计算成果:

图 4—8 中表示单轮加弹簧上质量, 以速度为  $60\text{km/h}$  和  $160\text{km/h}$  过桥时, 桥梁跨中挠度变化规律, 与图 4—5 比较可见, 两者的变化规律基本相同, 说明车轮与车体间的弹簧对小跨度桥梁的跨中挠度影响不大。

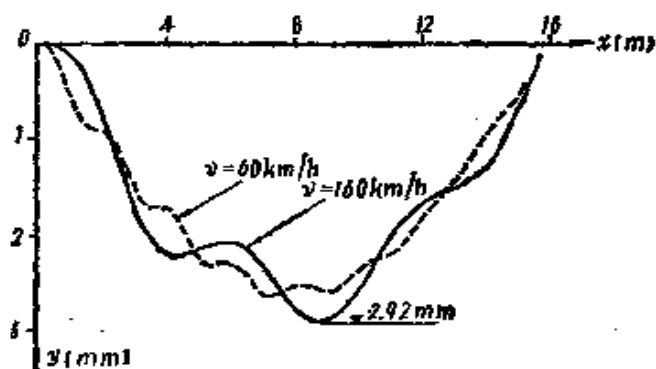


图 4—8 单轮加弹簧过桥时的跨中挠度

图 4—9、10 中表示速度为  $60\text{km/h}$  和  $160\text{km/h}$  时, 弹簧上质量以及弹簧下车轮的挠度 ( $z(t)$  和  $y(vt, t)$ )。从图中可以明显地看出, 由于弹簧的作用, 弹簧上质量的竖向挠度与弹簧下车轮挠度相比, 有一个“滞后”作用。此外, 弹簧上质量按其车辆自振频率 (约  $2\text{Hz}$ ) 振动, 弹簧下车轮则按桥梁的自振频率 ( $9.09\text{Hz}$ ) 振动。

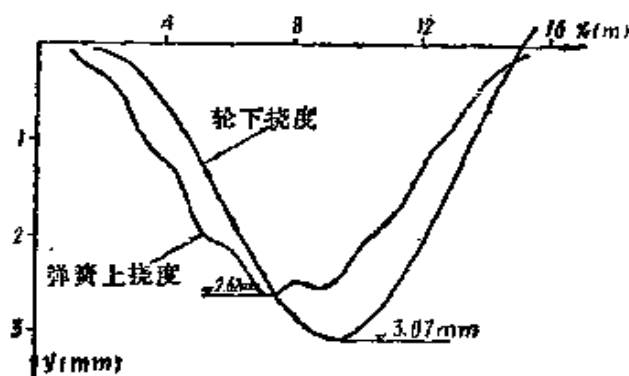


图 4—9 弹簧上和轮下挠度 ( $v = 60\text{ km/h}$ )

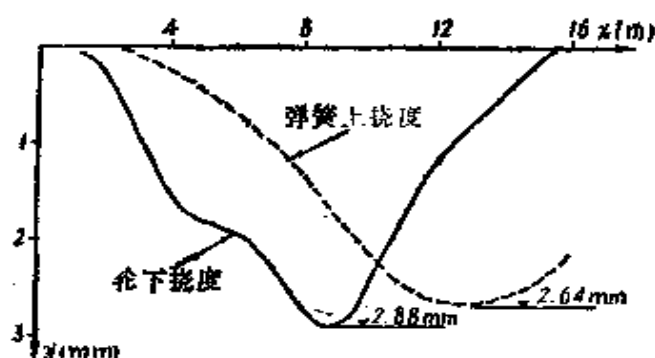


图 4—10 弹簧上和轮下挠度 ( $v = 160 \text{ km/h}$ )

图 4—11中表示弹簧上质量的加速度，与单轮过桥（图 4—7）相比可见，由于弹簧的存在，弹簧上质量的振动频率较小，振动加速度值也大为减小。

表 4—1 中将静活载、单轮以及单轮加弹簧的计算成果汇总。

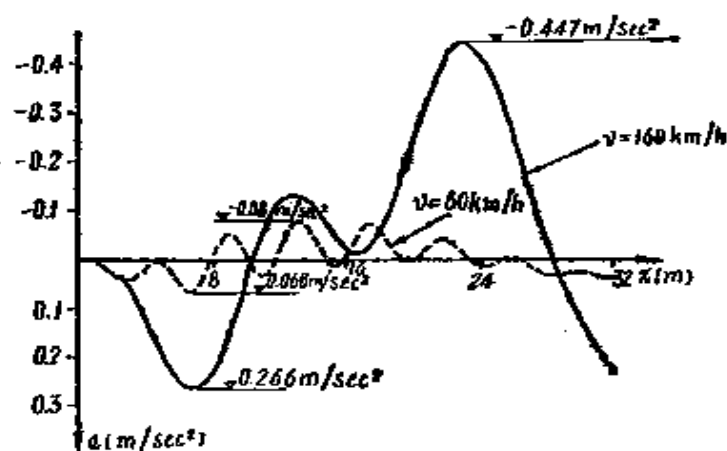


图 4—11 簧上质量加速度

## 第五章 动力方程的数值解

### ——逐步推进法

一般结构动力平衡方程可以写成如下通式:

$$M_1 \ddot{T} + C_1 \dot{T} + K_1 T = F_1(t) \quad (5-1)$$

式(5-1)可以是单个方程式或是包括  $n$  个方程式的联立方程组。式中  $T$  是时间  $t$  的待求函数。

当  $M_1$ 、 $C_1$  以及  $K_1$  均为与时间  $t$  无关的常数时(如求自振频率或不计活载质量时), 式(5-1)可以得出解析解。然而, 在考虑移动荷载质量的动力分析中, 表达质量的项  $M_1$  常常是时间  $t$  的函数, 一般得不出解析解, 要采用数值解。

在这一章中, 介绍用逐步推进法解动力方程, 为了以后讨论的方便, 将式(5-1)改写成两个一阶的微分方程:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= CV + KT + F(t) \\ \dot{T} &= V \end{aligned} \quad (5-2)$$

只要对一阶方程组(5-2)进行数值解, 也就得出式(5-1)的解。式(5-2)的初值问题可以写成如下形式, 即:

$$\text{已知 } y' = f(t, y) \quad a \leq t \leq b \quad (5-3)$$

初始条件:  $y(Q) = \eta$

求  $y = y(t)$

式(5-3)通常是一个微分方程组。

#### 第一节 函数离散化和欧拉方法

用逐步推进法解动力方程(5-3)的基本思路是首先

将时间区间  $t$  离散化。按式 (5-3)，将  $t$  的区间  $[a, b]$  划分为  $n$  等分，每一计算步长  $h$  为：

$$h = (b - a) / n \quad (5-4)$$

各分界点的位置为：

$$t_0 = a, t_1 = a + h, \dots, t_n = a + nh = b$$

然后在已知初始条件下，逐步向前推进，求出各分界点的函数值。

欧拉方法是最简单的初值问题逐步推进解法。这种方法的几何意义是设精确解为  $y(t)$ ，现在用一根折线  $\bar{y}(t)$  近似表达  $y(t)$ ，(图 5-1)。用数学表达式表示，即自起始点  $y_0$  开始，逐次按下列步骤推进。

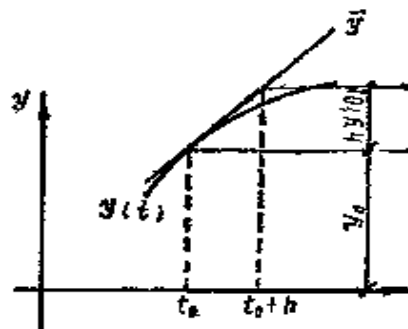


图 5-1 欧拉方法

$$y_1 = y_0 + h y'(a) = y_0 + h f(t_0, y_0) \quad (5-5)$$

$$y_2 = y_1 + h y'(a + h) = y_1 + h f(t_1, y_1)$$

.....

$$y_n = y_{n-1} + h y'[a + (n-1)h] = y_{n-1} + h f(t_{n-1}, y_{n-1})$$

可以证明[17]，如运动方程本身是稳定的，则只要  $h$  取得足够小，可以使  $\bar{y}(t)$  无限逼近精确解。

## 第二节 朗格——库脱 (Runge—Kutta) 方法

根据数学分析教程，对于一个解析函数，可以用泰勒 (Taylor) 展开式表达已知点  $t_0$  附近的函数值，即：

$$y(t_0 + h) = y(t_0) + h y'(t_0) + \dots + \frac{h^n}{n!} y^{(n)}(t_0) + \dots \quad (5-6)$$

式中 $y^{(n)}(t_0)$ 表示 $y(t)$ 在 $t_0$ 点处的 $n$ 阶导数。对于式(5-3)所示微分方程组,则泰勒展开式中相应导数可表示为:

$$\begin{aligned} y'(t_0) &= f(t_0, \eta) \\ y''(t_0) &= \left( -\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} \right)_{t=t_0} \\ y'''(t_0) &= \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial t} \left( \frac{dy}{dt} \right) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial t} + \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \frac{dy}{dt} \right]_{t=t_0} \quad (5-7) \end{aligned}$$

对照式(5-5)可见,欧拉方法是泰勒展开式中只取步长 $h$ 的一次项。

如要提高精度,应考虑步长 $h$ 的高次项,即要知道计算点的高阶导数,从几何上说来,即要用高次曲线向前递推。

目前动力方程的数值解法都是用电子计算机进行的,由于计算机求函数的导数比较麻烦,因此一般不直接用泰勒展开式,而采用朗格——库脱方法。这是一种间接使用泰勒展开式的方法,即在步长 $h$ 上,用 $n$ 个点的函数值 $f$ ,利用这些 $f$ 的线性组合代替 $f$ 的高阶导数。至于 $f$ 线性组合的系数,则根据泰勒展开式确定。

如按式(5-3),已知:

$$y' = f(t, y)$$

当 $t = t_m$ 时,  $y = y_m$ ,  $y'_m = f(t_m, y_m)$

设步长为 $h$ ,按朗格——库脱法, $y_{m+1}$ 可表示为:

$$y_{m+1} = y_m + \sum_{i=1}^v w_i k_i \quad (5-8)$$

式中 $w_i$ 为待定权因子, $v$ 为所使用的 $f$ 值个数,

$k_i$ 由下列方程定出

$$k_i = h f \left( t_m + c_i h, y_m + \sum_{l=1}^{i-1} a_{il} k_l \right)$$

$$(i = 1, 2, \dots, v) \quad (5-9)$$

具体表示出 $k_i$ 式为:

$$\begin{aligned} c_1 &= 0 \\ k_1 &= hf(t_m, y_m) \\ k_2 &= hf(t_m + c_2 h, y_m + a_{21} k_1) \\ k_3 &= hf(t_m + c_3 h, y_m + a_{31} k_1 + a_{32} k_2) \\ &\dots \dots \end{aligned} \quad (5-10)$$

式中 $f(t_m, y_m)$ 表示计算点 $(t_m, y_m)$ 的斜率,而 $f(t_m + c_2 h, y_m + a_{21} k_1)$ 则表示 $t_m$ 和 $t_{m+1}$ 点间的中间点斜率近似值。

当 $v = 1$ 时,式(5-8)中只要计算 $k_1$ 值,也即第一节中所介绍的欧拉方法。当 $v > 1$ 时,式(5-9)中 $a_{ij}$ 以及 $c_i$ 是为提高精度而设的常数,这些常数是根据式(5-9)与泰勒展开式的比较而确定。

如取 $v = 2$ ,

$$\text{则按式(5-8)可得: } y_{m+1} = y_m + w_1 k_1 + w_2 k_2 \quad (5-11)$$

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(t_m, y_m) = hf_m \\ k_2 &= hf(t_m + c_2 h, y_m + a_{12} k_1) \end{aligned} \quad (5-12)$$

根据泰勒展开式,式(5-11)中 $k_2$ 可以表示为:

$$\begin{aligned} f(t_m + c_2 h, y_m + a_{21} k_1) &= f(t_m, y_m) + c_2 h \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_{t_m} \\ &\quad + a_{21} k_1 \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)_{t_m} + \dots \end{aligned}$$

$$\text{即: } k_2 = hf_m + h^2 \left( c_2 \frac{\partial f}{\partial t} + a_{21} f \frac{\partial f}{\partial y} \right)_{t_m} + \dots \quad (5-13)$$

由此,式(5-11)中 $y_{m+1}$ 可以写成:

$$y_{m+1} = y_m + w_1 hf_m + w_2 \left[ hf_m + h^2 \left( c_2 \frac{\partial f}{\partial t} \right)_{t_m} + \dots \right]$$

$$+ a_{21} f \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{t_m} \Big\} + \dots \quad (5-14)$$

将式 (5-14) 与泰勒展开式 (5-6) 相应  $h$  同阶项相比较可得:

$$\begin{aligned} w_1 + w_2 &= 1 \\ w_2 c_2 &= 0.5 \\ w_2 a_{21} &= 0.5 \end{aligned} \quad (5-15)$$

上列三个方程中有四个未知数, 因此可任意确定一个参数。如表 5-1 所示, 可以取  $c_2$  分别等于 0.5、1/3 及 1, 即分别表示  $y_{m+1}$  为:

$$\begin{aligned} y_{m+1} &= y_m + h f(t_m + h/2, y_m + f_m h/2) \\ y_{m+1} &= y_m + (h/4) [f(t_m, y_m) + 3f(t_m + 2h/3, \\ &\quad y_m + f_m 2h/3)] \\ y_{m+1} &= y_m + (h/2) [f(t_m, y_m) + f(t_m + h, \\ &\quad y_m + h f_m)] \end{aligned} \quad (5-16)$$

表 5-1

参 数	$a_{21}$	$w_1$	$w_2$
$c_2 = 0.5$	1/2	0	1
$c_2 = 2/3$	2/3	1/4	3/4
$c_2 = 1$	1	1/2	1/2

式 (5-16) 是三个典型的二阶朗格——库脱表达式, 第一式也称为中点公式, 它是用步长  $h$  的中点处一阶导数来递推, 第二式及第三式则分别利用两个点处的一阶导数来向前推进。利用二阶朗格——库脱方法向前推进也简称为二点推进法。

### 第三节 基尔 (Gill) 公式

基尔公式是一种四阶的朗格——库脱公式<sup>[17]</sup>, 或称为



是四点法，由于这个公式有减少舍入误差的优点，一般广为采用并且已有现成程序，在这节中简略地叙述其过程。

朗格——库脱的四阶表达式可以写为：

$$y_{m+1} = y_m + \sum_{i=1}^4 w_i k_i \quad (5-17)$$

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= h f(t_m, y_m) \\ k_2 &= h f(t_m + c_2 h, y_m + a_{21} k_1) \\ k_3 &= h f(t_m + c_3 h, y_m + a_{31} k_1 + a_{32} k_2) \\ k_4 &= h f(t_m + c_4 h, y_m + a_{41} k_1 + a_{42} k_2 + a_{43} k_3) \end{aligned} \right\} \quad (5-18)$$

上式中  $k_1$ 、 $k_2$ 、 $k_3$  和  $k_4$  分别表示  $t_m$  和  $(t_m + h)$  间四个中间点斜率的近似值与  $h$  的乘积。根据泰勒展开式，如略去高阶项，上列  $k_1$ 、 $k_2$ 、 $k_3$  和  $k_4$  可表示成：

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= h f_m \\ k_2 &= h f_m + \left( c_2 h^2 \frac{\partial f}{\partial t} + a_{21} k_1 h \frac{\partial f}{\partial y} \right)_{t_m} \\ k_3 &= h f_m + \left[ c_3 h^2 \frac{\partial f}{\partial t} + (a_{31} k_1 + a_{32} k_2) h \frac{\partial f}{\partial y} \right]_{t_m} \\ k_4 &= h f_m + \left[ c_4 h^2 \frac{\partial f}{\partial t} + (a_{41} k_1 + a_{42} k_2 + a_{43} k_3) h \frac{\partial f}{\partial y} \right]_{t_m} \end{aligned} \right\} \quad (5-19)$$

将上式 (5-19) 代入式 (5-17) 可得出朗格——库脱四阶表达式为： $y_{m+1} = y_m + (w_1 + w_2 + w_3 + w_4) h f_m + h^2 [(w_2 c_2 + w_3 c_3 + w_4 c_4) \frac{\partial f}{\partial t} + (w_2 a_{21} + w_3 a_{31} + w_4 a_{41} + w_3 a_{32} + w_4 a_{42} + w_4 a_{43}) f \frac{\partial f}{\partial y}]_{t_m} + h^3 [(w_3 a_{32} c_2 + w_4 a_{42} c_2 + w_4 a_{43} c_3) \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial y} + (w_3 a_{32} a_{21} + w_4 a_{42} a_{21} + w_4 a_{43} a_{31} + w_4 a_{43} a_{32}) f (\frac{\partial f}{\partial y})^2]_{t_m} + h^4 [w_4 a_{43} a_{32} c_2 (\frac{\partial f}{\partial t}) (\frac{\partial f}{\partial y})^2 +$

$$w_4 a_{43} a_{32} a_{21} f \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^3 \Big|_{t_m} \quad (5-20)$$

又如直接从式 (5-6) 推导出泰勒四阶表达式为:

$$\begin{aligned} y_{m+1} = & y_m + h f_m + \frac{h^2}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} f \right) \Big|_{t_m} + \frac{h^3}{3!} \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \right. \\ & + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y} f + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} f^2 + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial t} + \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 f \Big] \Big|_{t_m} + \frac{h^4}{4!} \\ & \left[ \frac{\partial^3 f}{\partial t^3} + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial t^2} + 3 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial t} \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right) + 5 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial t} \cdot \right. \\ & \frac{\partial f}{\partial y} f + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial t} f^2 + 3 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \frac{\partial f}{\partial t} f + 4 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \frac{\partial f}{\partial y} f^2 + \\ & \left. \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} f^3 + \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial f}{\partial t} + \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^3 f \right] \Big|_{t_m} \end{aligned} \quad (5-21)$$

式 (5-20) 和 (5-21) 都是方程 (5-3) 的四阶表达式, 相应导数的系数应相等, 可以得出下列关系式。

$$\left. \begin{aligned} w_1 + w_2 + w_3 + w_4 &= 1 \\ w_2 c_2 + w_3 c_3 + w_4 c_4 &= 1/2 \\ w_2 a_{21} + w_3 a_{31} + w_4 a_{41} + w_3 a_{32} + w_4 a_{42} + w_4 a_{43} &= 1/2 \\ w_3 a_{32} c_2 + w_4 a_{42} c_2 + w_4 a_{43} c_3 &= 1/6 \\ w_3 a_{32} a_{21} + w_4 a_{42} a_{21} + w_4 a_{43} a_{31} + w_4 a_{43} a_{32} &= 1/6 \\ w_4 a_{43} a_{32} c_2 &= 1/24 \\ w_4 a_{43} a_{32} a_{21} &= 1/24 \end{aligned} \right\} \quad (5-22)$$

上式为 7 个联立方程式, 在式中包含  $w_1$ 、 $w_2$ 、 $w_3$ 、 $w_4$ 、 $c_2$ 、 $c_3$ 、 $c_4$ 、 $a_{21}$ 、 $a_{31}$ 、 $a_{32}$ 、 $a_{41}$ 、 $a_{42}$  和  $a_{43}$  共 13 个参数, 因此可以任意定 6 个参数, 在基尔公式中取如下 6 个条件:

$$\left. \begin{aligned} c_2 = c_3 = 1/2 \\ c_4 = 1 \\ a_{31} = (\sqrt{2} - 1)/2 \\ a_{41} = 0 \\ a_{42} = -\sqrt{2}/2 \end{aligned} \right\} \quad (5-23)$$

将上列条件代入式 (5-22), 可以得出基尔公式 (5-17) 如下:

$$\left. \begin{aligned} y_{m+1} &= y_m + \frac{1}{6} [k_1 + (2 - \sqrt{2})k_2 + (2 + \sqrt{2}) \\ &\quad \times k_3 + k_4] \\ k_1 &= hf(t_m, y_m) \\ k_2 &= hf\left(t_m + 1/2h, y_m + \frac{1}{2}k_1\right) \\ k_3 &= hf\left[t_m + \frac{1}{2}h, y_m + \frac{(\sqrt{2}-1)}{2}k_1 + \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)k_2\right] \\ k_4 &= hf\left(t_m + h, y_m - \frac{\sqrt{2}}{2}k_2 + \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)k_3\right] \end{aligned} \right\}$$

#### 第四节 基尔过程计算机程序

##### (一) 功能

微分方程组:  $\frac{dy_i}{dy_1} = f_i(y_1, y_2 \dots y_n)$

初始条件:  $y_i(y_{10}) = y_{i0} \quad i = 1, 2, \dots, n$

其中:  $y_1 = x, y_{10} = x_0, f_1 \equiv 1$

基尔程序是由给定步长  $h$ , 从第  $k$  点上的函数值  $y_{ik}$ , 应用基尔公式求出第  $k+1$  点上的函数值  $y_{i,k+1}$ 。在程序中, 使用如下代号及公式:

$$y_{ij} = y_{i,j-1} + h[a_j(k_{ij} - b_j q_{i,j-1})] \quad i = 1, 2, \dots, n \\ (j = 1, 2, 3, 4)$$

其中  $k_{ij} = f_i(y_{1j-1}, y_{2j-1}, \dots, y_{nj-1})$

$$q_{ij} = q_{i,j-1} + 3[a_i(k_{ij} - b_i q_{i,j-1})] - c_i k_{ij}$$

参数:  $a_1 = 1/2, a_2 = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}, a_3 = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}, a_4 = \frac{1}{6}$

$$b_1 = 2, b_2 = 1, b_3 = 1, b_4 = 2$$

$$c_1 = \frac{1}{2}, c_2 = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}, c_3 = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}, c_4 = \frac{1}{2}$$

$$q_{i0}(y_{10}) = 0, q_{i0}(y_{1k}) = q_{i4}(y_{1k-1}) \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

## (二) 程序

```
SUBROUTINE GILL(N,H,BE,Y,K,Q)
LOGICAL BE
DIMENSION Y(N),K(N),Q(N),A(4),B
(4),C(4)
REAL K
DO 20 I=1,N
Q(I)=0
A(1)=0.5
A(2)=1-SQRT(0.5)
A(3)=1+SQRT(0.5)
A(4)=1/6.
B(1)=2
B(2)=1
B(3)=1
B(4)=2
C(1)=0.5
C(2)=1-SQRT(0.5)
C(3)=1+SQRT(0.5)
```

```
C(4)=0.5  
BE=.FALSE.  
20  CONTINUE  
    DO 60 J=1,4  
    CALL FCT(Y,K)  
    AJ=A(J)  
    BJ=B(J)  
    CJ=C(J)  
    DO 100 I=1,N  
    D=AJ*(K(I)-BJ*Q(I))  
    Y(I)=Y(I)+H*D  
    Q(I)=Q(I)+3*D-CJ*K(I)  
100  CONTINUE  
    60  CONTINUE  
    RETURN  
    END
```

## 第六章 列车过桥时桥梁竖向振动分析

### 第一节 引起振动的原因及 振动分析的主要内容

当列车以一定速度过桥时，车辆和桥梁都要产生竖向和横向振动，本章是讨论竖向振动问题。

列车过桥，引起车辆和桥梁竖向振动的原因有下列几方面：

- (1) 机车动力作用：蒸汽机车动轮偏心块的周期力，内燃机车动力机组的振动；
- (2) 速度的影响：活载以一定速度过桥的动力作用；
- (3) 桥头线路不平整影响：机车或货车带有一定的初始加速度上桥；
- (4) 轮轨不平整：轮箍不圆，轨面不平顺（包括钢轨接头）；
- (5) 桥道梁挠度影响。

蒸汽机车动轮偏心块周期力是蒸汽机车过桥时引起竖向振动的主要原因，在第三章中曾讨论蒸汽机车的临界速度，这个问题在现场实测中均已证实。

在第四章中曾经讨论单轮过桥的振动，实际车辆是由车体、转向架框架和轮对所组成，当列车通过桥梁时，车辆和桥梁组成一个联合动力体系，对于这个体系进行动力分析，主要内容如下：

#### (一) 研究车辆过桥的平稳性。

机车及客车的平稳性，是根据司机和旅客的舒适程度评

定的。当列车以规定的高速度通过桥梁时，在桥上的车体振动频率、加速度以及振幅应满足平稳性要求。

目前，我国尚没有正式建立客车平稳性的评定标准。下面介绍国外使用比较广泛的斯佩林（Sperling）经验公式〔13〕。该公式用 $W$ 表示平稳性指标。

$$W = 2.7^{10} \sqrt{a^3 f^5 F(f)} = 0.896^{10} \sqrt{j^3 F(f)/f} \quad (6-1)$$

式中  $a$  —— 振幅 (cm)；

$f$  —— 频率 (Hz)；

$j$  —— 振动加速度 (cm/sec<sup>2</sup>)。

$F(f)$ 是与振动频率有关的函数，称为频率修正系数，

对于竖直振动：

当  $f = 0.5 \sim 5.9 \text{ Hz}$                        $F(f) = 0.325 f^2$

当  $f = 5.9 \sim 20 \text{ Hz}$                        $F(f) = 400/f^2$

当  $f > 20 \text{ Hz}$                                $F(f) = 1$

表 6—1 中表示按平稳性指标 $W$ 所检定的平稳性等级。

评定货车平稳性的方法是以货物损坏程度评定的。根据我国车辆研究部门的实践认为，在车速不超过120km/h范围内，竖直振动加速度幅值不超过0.7g，横向振动加速度幅值不超过0.5g是符合货车要求的。

表 6—1

平稳性等级	竖直振动指标 $W$
优	1
良好	2
合格	3
不合格	4.5

## (二) 研究防止脱轨的安全性

当列车高速通过桥梁时，特别在进桥和出桥时刻，由于桥跨结构下挠使轨道表面产生转折角，出现车轮轮重减载现象，即车轮动压力低于静压力值。根据日本的经验〔9〕，为了

防止脱轨，轮重减载率不应当超过静轮压力的25%~35%。

当研究横向振动时，还应当按轮轨间横向动荷载与竖向动荷载的比值来衡量防止脱轨的安全性。

### (三) 研究桥梁结构的动应力和动挠度

列车过桥，引起桥梁结构振动的因素很多，对桥梁结构竖向振动进行理论分析，有助于掌握桥梁结构动应力及动挠度的变化规律，加深对活载动力作用的理解。

此外，随着车速的提高、货车载重的增大以及对结构动力安全度的研究，都要求比较深入地研究活载对桥梁的动力作用问题。

## 第二节 机车及货车动力学计算图式

图6—1表示东风<sub>4</sub>型内燃机车轮廓尺寸。从机车动力学角度来看，内燃机车是由车体、转向架框架、轮对以及联系弹簧所组成。联系转向架框架和车轮之间的弹簧称为一系弹簧，联系车体和转向架框架之间的弹簧称为二系弹簧（图6—2）。

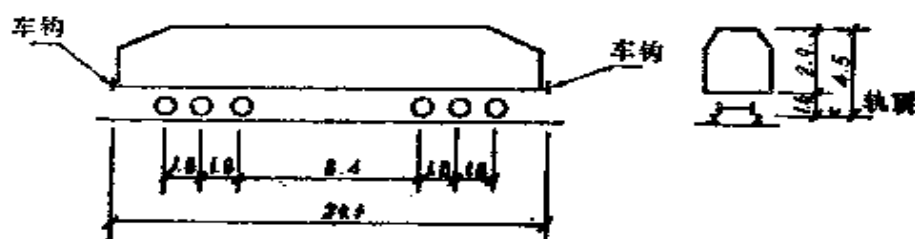


图6—1 东风<sub>4</sub>型内燃机车轮廓尺寸 (m)

在列车过桥动力分析中，将车体当作一个空间刚体，不考虑车体结构的弹性变形。在空间振动分析中，车体有六个



变位自由度，即三个线位移和三个绕轴的转动（图 6—3）。

在竖向振动分析中，只

考虑车体的竖向位移  $z$

和转角  $\theta$ （图 6—2）。

竖向位移  $z$  是车体沿 铅

垂轴上下移动，称为沉

浮振动。转角  $\theta$  是车体

绕形心  $O$  在竖平面的转

动，称为点头振动。由

于车体的竖向振动引起在前后转向架处的位移为：

$$\text{前转向架：} \quad \delta_1 = z + \theta s/2$$

$$\text{后转向架：} \quad \delta_2 = z - \theta s/2$$

式中  $s$  表示前后转向架的间距

如图 6—2 所示车体、转向架框架和轮对动力体系，通称为双层动力系统。在列车过桥动力分析中，由于与车体质量相比，转向架框架的质量比较小，车体振动是桥梁动力分析中的主要因素，因此为了减少计算的复杂性，一般在竖向振动分析中，将转向架框架质量并入轮对，将机车当作单层动力系统（图 6—4）。至于弹簧刚度  $k$ ，则按串联公式，将两系弹簧合并：

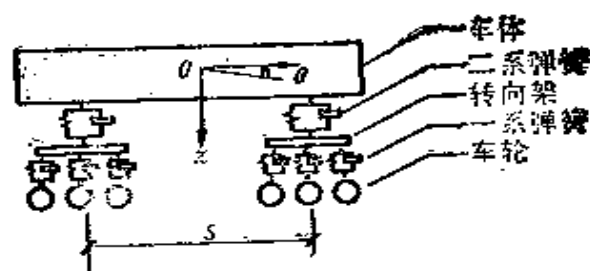


图 6—2 内燃机车动力学计算图式  
——双层动力系统

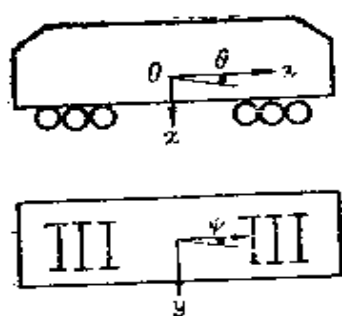


图 6—3 车体变位自由度

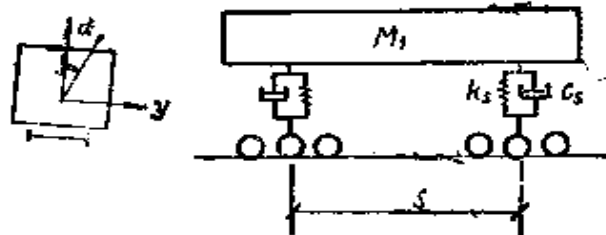


图 6—4 单层动力系统

$$k_s = \frac{1}{\frac{1}{3k_1} + \frac{1}{k_2}} \quad (6-2)$$

式中  $k_1$  表示每一轮轴上的弹簧刚度

$k_2$  表示二系弹簧刚度

如机车车体的质量为  $M_1$ , 车体在竖直平面内转动惯量为  $J_1$ , 则机车车体的沉浮及点头自振频率可以用下式表示出:

$$\text{沉浮自振频率: } f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2k_s}{M_1}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{\delta_s}} \quad (6-3)$$

$$\text{点头自振频率: } f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2k_s s^2}{J_1}} \quad (6-4)$$

式中  $\delta_s$  表示车体弹簧静载挠度。

表 6—2 中表示东风<sub>4</sub>型机车主要技术指标及动力性能 [20]。

东风<sub>4</sub>型内燃机车主要技术指标及动力性能 表 6—2

分 类	技术指标及动力性能					
技术参数	轴 式	构造速度 km/h		轴重 t	转向架自重 t	每轴弹簧下重量 t
	3 <sub>0</sub> —3 <sub>0</sub>	客运 120	货运 100	23	22.7	4.61
弹簧悬挂装置	一系静挠度 mm	二系静挠度 mm	总静挠度 $\delta_s$	弹簧刚度 $k_1$	$k_2$	$k_s$
	123	16	139	149.5t/m	2890t/m	388t/m
自振频率 (Hz)	点 头	沉 浮	侧 滚			
	1.67	1.78	0.9			
实 测 振动加速 (最大值) g	垂 直 方 向	车 速	总加速度	低频加速度	高频加速度	
		100km/h	0.24g	0.116g	0.173g	
		120km/h	0.273g	0.064g	0.256g	
	水 平 方 向	车 速	总加速度	低频加速度	高频加速度	
		100km/h	0.095g	0.039g	0.085g	
		120km/h	0.129g	0.047g	0.100g	

C<sub>62</sub>敞车的主要技术指标及动力性能

表 6—3

分 类		技术指标及动力性能				
技术参数	载重 t	自重 t	轴数	构车速度 km/h		
	60	18.2	4	100		
载货主要尺寸	地板面距轨面高 m	车内高 m	车内宽 m	车内长 m		
	1.079	1.9	2.9	12.5		
新转 8 转向架技术参数	载重 t	自重 t	轴 数	构造速度 km/h	下心盘面距轨面高 m	
	38	4	2	120	0.690	
	弹簧静挠度 mm		弹簧垂直刚度 N/m			
	35.8		$10.55 \times 10^4$			
实测动力性能 g	垂 直 方 向	弹簧动力系数	弹簧上动力系数	心盘垂直加速度		
		$v = 40 \sim 110 \text{ km/h}$ 平均值 $-0.213g$ 最大值 $-0.408g$	$v = 40 \sim 110 \text{ km/h}$ 平均值 $<0.206g$ 最大值 $-0.274g$	$v < 70 \text{ km/h}$ 平均值 $0.184 \sim 0.266g$ 最大值 $-0.486g$ $v = 100 \text{ km/h}$ 平均值 $-0.264g$ 最大值 $-0.45g$		
	水 平 方 向	水平加速度				
		$v = 40 \sim 110 \text{ km/h}$ 平均值 $-0.097 \sim 0.18g$ 最大值 $-0.27g$				

铁路货车包括有敞车、平车、棚车、油罐车和特种车等，一般都采用单系弹簧的转向架，转向架弹簧的刚度比机车或客车的刚度大。图 6—5 中表示 C<sub>62</sub> 型敞车轮廓尺寸，载货为 60t，采用新转 8 型转向架，转向架的垂直刚度约为东风<sub>4</sub>型机车的三倍。表 6—3 中表示 C<sub>62</sub> 型敞车的主要技术指标及动力性能<sup>[21]</sup>。

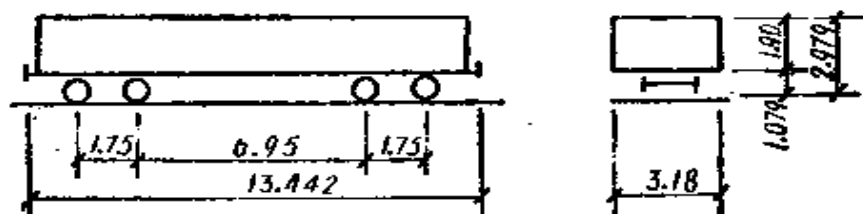


图 6—5 C<sub>62</sub> 敞车轮廓尺寸 (m)

### 第三节 动力平衡方程

图 6—6 表示双（内燃）机车连挂过桥的计算图式。机车车体、轮轴与桥梁结构一起组成一个联合振动体系。各部分的位移（或挠度）可以表示为：

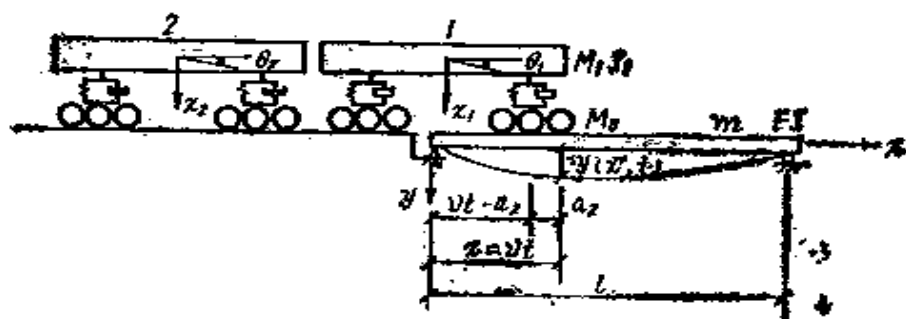


图 6—6 双机连挂过桥

第1、2车体的沉浮振动： $z_1(t)$ 、 $z_2(t)$

第1、2车体的点头振动： $\theta_1(t)$ 、 $\theta_2(t)$

桥梁结构的挠度： $y(x, t)$

车轮的竖向位移： $y_i = y(x_i, t) + w_i$  ( $i = 1, 2 \dots n$ )

(6—5)

式中 $x_i$ 表示第 $i$ 个车轮的位置。如令机车车轮间距为 $a_1$ 、 $a_2 \dots a_{12}$  (图 6—7)，则 $x_i$ 可以表示为：

$$x_i = vt - a_i \quad (6—6)$$

式 (6—5) 中 $w_i$ 表示由于轨面不平顺和轮箍不圆等所引起的附加竖向位移，在第七节中讨论。

(一) 机车车体动力平衡方程：

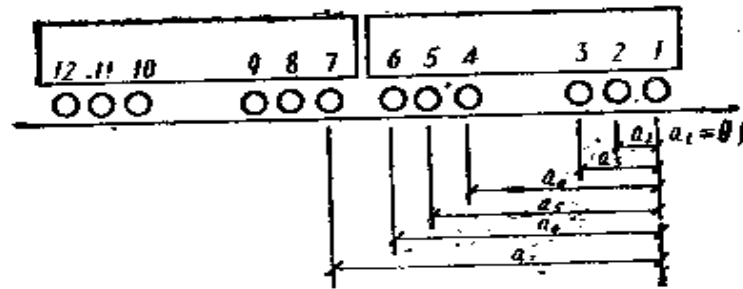


图 6—7 车轮号及间距

设在振动过程中，车体弹簧的变形分别为：

第 1 机车车体前转向架弹簧的压缩变形： $g_{1f}$

第 1 机车车体后转向架弹簧的压缩变形： $g_{1l}$

第 2 机车车体前转向架弹簧的压缩变形： $g_{2f}$

第 2 机车车体后转向架弹簧的压缩变形： $g_{2l}$

由此，根据车体的动力平衡方程，可以列出：

$$\left. \begin{aligned} \text{第1机车车体沉浮振动: } M_1 \ddot{z}_1 + c_s (\dot{g}_{1f} + \dot{g}_{1l}) + k_s (g_{1f} + g_{1l}) &= 0 \\ \text{第1机车车体点头振动: } J_1 \ddot{\theta}_1 + c_s \frac{s}{2} (\dot{g}_{1f} - \dot{g}_{1l}) + k_s \frac{s}{2} (g_{1f} - g_{1l}) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

(6—7)

$$\left. \begin{aligned} \text{第2机车车体沉浮振动: } M_2 \ddot{z}_2 + c_s (\dot{g}_{2f} + \dot{g}_{2l}) + k_s (g_{2f} + g_{2l}) &= 0 \\ \text{第2机车车体点头振动: } J_2 \ddot{\theta}_2 + c_s \frac{s}{2} (\dot{g}_{2f} - \dot{g}_{2l}) + k_s \frac{s}{2} (g_{2f} - g_{2l}) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

(6—8)

式中  $M_1, J_1$ ——表示弹簧上车体的质量和转动惯量  
 $c_s, k_s$ ——表示转向架阻尼系数和弹簧刚度

(二) 桥梁结构动力平衡方程:

对于中小跨度实腹梁桥, 当第一车轮上桥时, 桥梁结构动力平衡方程可表示为:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EJ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + 2m\omega_b \frac{\partial y}{\partial t} \\ & = \delta(x - vt) [(M_0 + M_{1/8})g - M_0 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \\ & \quad + \frac{1}{3} (c_s \dot{g}_{1/8} + k_s g_{1/8})] \end{aligned} \quad (6-9)$$

式中  $y(x, t)$ ——桥梁结构竖向动力位移  
 $m$ ——桥梁(包括道床)单位长度自重质量  
 $\omega_b$ ——桥梁阻尼特性系数

在等式右端的荷载项中, 包括三个组成部分: 其中  $(M_0 + M_{1/8})g$  表示车辆静荷载所引起的轴重; 第二项是车轮的惯性力; 第三项表示由于转向架弹簧变形所引起的荷载。

当桥上有第  $n$  至  $m$  号车轮时, 式(6-9)等式右端荷载项可表示为:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=n}^m \delta[x - (vt - a_i)] [(M_0 + M_{1/8})g \\ & \quad - M_0 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{1}{3} (c_s \dot{g}_{1/8} + k_s g_{1/8})] \end{aligned} \quad (6-10)$$

应当指出, 上式中最后一个圆括弧内,  $\dot{g}_{1/8}$  和  $g_{1/8}$  是表示第一车体前转向架的, 如所计算车轮是属于其他转向架时, 应当用相应的弹簧变位值代入。

(三) 弹簧变形方程(或称联系方程)

从图 6-6 中可以看出转向架弹簧的变形( $g_{1/8}, g_{1/8} \dots$ )

实质上是车体位移与轮轴位移之差，因此由几何关系，可得出如下四个联立方程（这里暂不考虑轨面不平顺因素）。

$$\left. \begin{aligned} g_{1f} &= (z_1 + \theta_1 s/2) - y(vt - a_2) \\ g_{1r} &= (z_1 - \theta_1 s/2) - y(vt - a_3) \\ g_{2f} &= (z_2 + \theta_2 s/2) - y(vt - a_8) \\ g_{2r} &= (z_2 - \theta_2 s/2) - y(vt - a_{11}) \end{aligned} \right\} \quad (6-11)$$

自方程式（6—7）至（6—11）共有9个方程式，其中包括9个未知函数，即： $z_1, z_2, \theta_1, \theta_2, g_{1f}, g_{1r}, g_{2f}, g_{2r}, y$ 。

#### 第四节 动力方程的解

从上节的推导中可知，列车过桥竖向振动方程为变系数偏微分方程，一般找不出解析解，要用逐步推进法求数值解。解的具体步骤如下：

（1）对于简支梁桥跨结构，可令桥梁挠度  $y(x, t)$  表示为：

$$y(x, t) = \sum_1^{\infty} T_i(t) \sin \frac{i\pi x}{l} \quad (6-12)$$

如不是简支梁，则可以用相应的振型函数代入

（2）输入初始条件：

在车轮未上桥前，桥跨结构一般认为是处于静止状态的，即  $t=0$ ， $T(0)=0$ ， $\dot{T}(0)=0$

由于桥头线路的不平顺，车体带有一定的初始振动上桥，即： $t=0$ ，

$$\left. \begin{aligned} z_1(0) &= C_{10}, \quad z_2(0) = C_{20}, \quad \theta_1(0) = d_{10}, \quad \theta_2(0) = d_{20} \\ \dot{z}_1(0) &= C_{11}, \quad \dot{z}_2(0) = C_{21}, \quad \dot{\theta}_1(0) = \dot{d}_{10}, \quad \dot{\theta}_2(0) = \dot{d}_{20} \end{aligned} \right\} \quad (6-13)$$

上列 $C_{10}$ 、 $C_{11}$ …等值可以根据不同的轨道与路基情况，由车体振动的实测值而定。

(3) 选定计算步长 $\Delta t$

(4) 将(2)中初始值代入动力平衡方程(6--7)至(6--11)，解联立方程，求出车体加速度，然后利用欧拉方法向前推进一步。

如在(6--12)中，只取一项，即：

$$y = T \sin \frac{\pi x}{l}$$

则利用基尔方法求解，有关 $K$ 和 $Y$ 函数的表达如下：

$$N=11$$

$$\begin{array}{ll} Y[1]=t & K[1]=\dot{Y}[1]=1 \\ Y[2]=z_1 & K[2]=\dot{Y}[2]=\dot{z}_1 \\ Y[3]=\dot{z}_1 & K[3]=\ddot{Y}[3]=\ddot{z}_1 \\ Y[4]=z_2 & K[4]=\dot{Y}[4]=\dot{z}_2 \\ Y[5]=\dot{z}_2 & K[5]=\ddot{Y}[5]=\ddot{z}_2 \\ Y[6]=\theta_1 & K[6]=\dot{Y}[6]=\dot{\theta}_1 \\ Y[7]=\dot{\theta}_1 & K[7]=\ddot{Y}[7]=\ddot{\theta}_1 \\ Y[8]=\theta_2 & K[8]=\dot{Y}[8]=\dot{\theta}_2 \\ Y[9]=\dot{\theta}_2 & K[9]=\ddot{Y}[9]=\ddot{\theta}_2 \\ Y[10]=T & K[10]=\dot{Y}[10]=\dot{T} \\ Y[11]=\dot{T} & K[11]=\ddot{Y}[11]=\ddot{T} \end{array} \quad (6-14)$$

(5) 与第四章计算单轮过桥时不同的是在计算列车



过桥时要另外编制一个计算过程，用以判定在桥上车轮的号码（见附录 2）。

在图 6—8 中列出了计算框图。

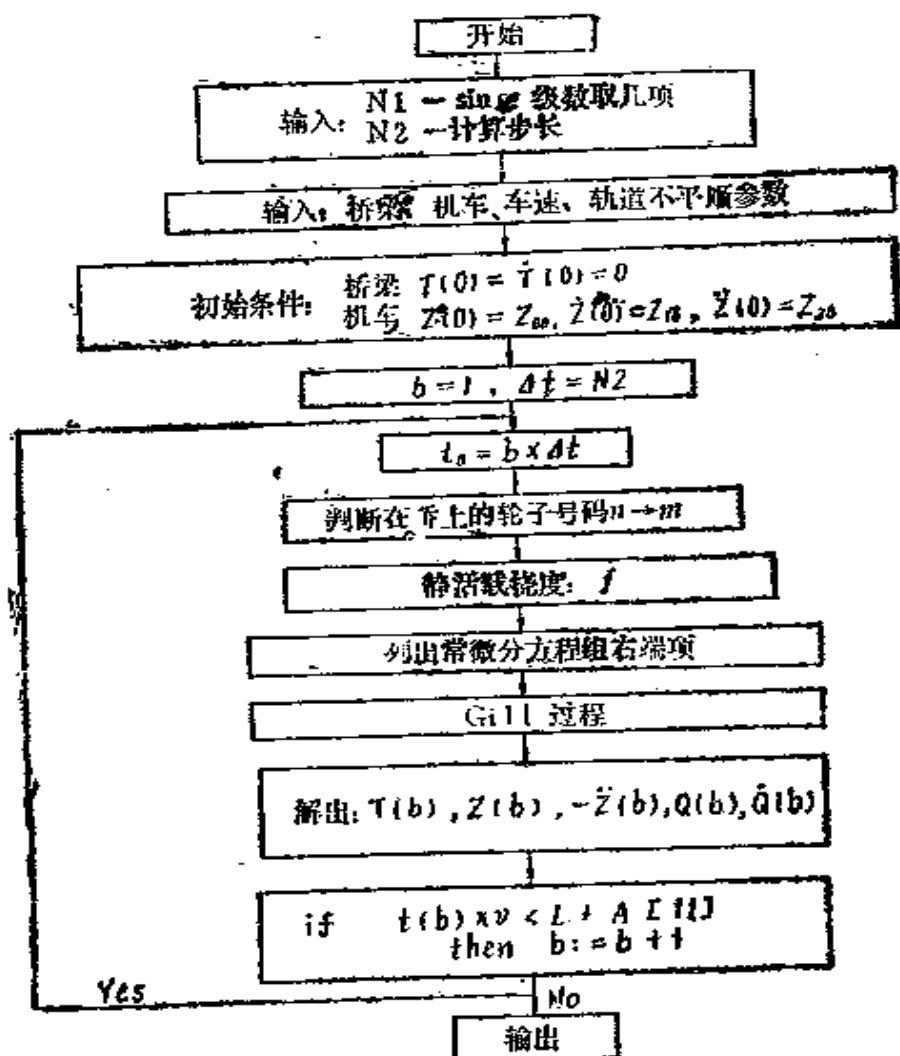


图 6—8 列车过桥计算框图

根据第一节所提到的振动分析主要内容，列车过桥竖向振动分析的成果应包括下列几部分：

(1) 桥梁结构；

(a) 桥梁跨中不计冲击的静止活载挠度和动挠度

(b) 桥梁结构的内力

(c) 桥梁桁架杆件的局部振动

(2) 机车(或货车)振动平稳性:

为保证车辆通过的平稳性,车体加速度及振动频率不当超过斯佩林公式所定合格的 $W$ 值。

第1机车车头的加速度:  $\ddot{z}_1(t) + \ddot{\theta}_1(t)s_{1/2}$

第1机车车尾的加速度  $\ddot{z}_1(t) - \ddot{\theta}_1(t)s_{1/2}$

第2机车车头的加速度  $\ddot{z}_2(t) + \ddot{\theta}_2(t)s_{1/2}$

第2机车车尾的加速度  $\ddot{z}_2(t) - \ddot{\theta}_2(t)s_{1/2}$

(3) 轮重变化率 $r$ :

在静止状态时,车轮作用于桥梁上的荷载为:

$$R_0 = (M_0 + M_{1/6})g$$

动力状态时,车轮作用于桥梁上的荷载为(第一转向架):

$$R_1 = (M_0 + M_{1/6})g - M_0(\partial^2 y / \partial t^2) + \frac{1}{3}(c_s \dot{g}_{1f} + k_s g_{1f}) \quad (6-15)$$

因此,由于动力作用,车轮对于桥梁载重的变化率 $r$ 可表示为:

$$r = R_1 / R_0$$

为了保证高速行车时不出现脱轨危险, $r$ 值不应太小,一般用所谓轮重减载率(即 $(1-r)$ 值)来限制,根据日本的经验, $(1-r)$ 值不应超过0.25~0.35。

## 第五节 中小跨度桥梁竖向 振动分析算例

(一) 桥梁和荷载:

(1) 桥跨结构: 计算跨度为32m 预应力混凝土简支梁

(2) 列车荷载: 内燃机车双机连挂, 有关计算常数及轮距见表 6—2。

(3) 速 度: 从60km/h至160km/h\*

(4) 计算步长: 取 $\frac{1}{1000}$ 梁长作为一步

(二) 桥梁跨中动挠度:

图 6—9 中表示当车速为60km/h和 160km/h 时, 桥梁跨中动挠度图。

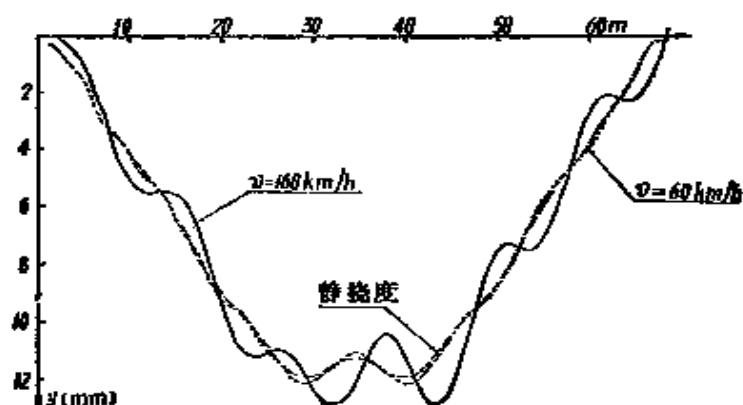


图 6—9 列车过桥跨中挠度 (计算跨度32m)

由于在计算中没有考虑轨道不平顺等因素, 因此实质上是反映活载以一定速度过桥的影响。

从图中可见, 当速度为60km/h时, 动挠度与静挠度基

\* 实际表 6—2 所列东风<sub>4</sub>型机车的构造速度只有120km/h。

本上相似，随着速度的提高，到160km/h时，动挠度也相应地增大。如令冲击系数定义为动挠度最大值和静挠度最大值之比，在图6—10中表示不同车速时，几种中小跨度预应力混凝土梁跨中挠度冲击系数值。

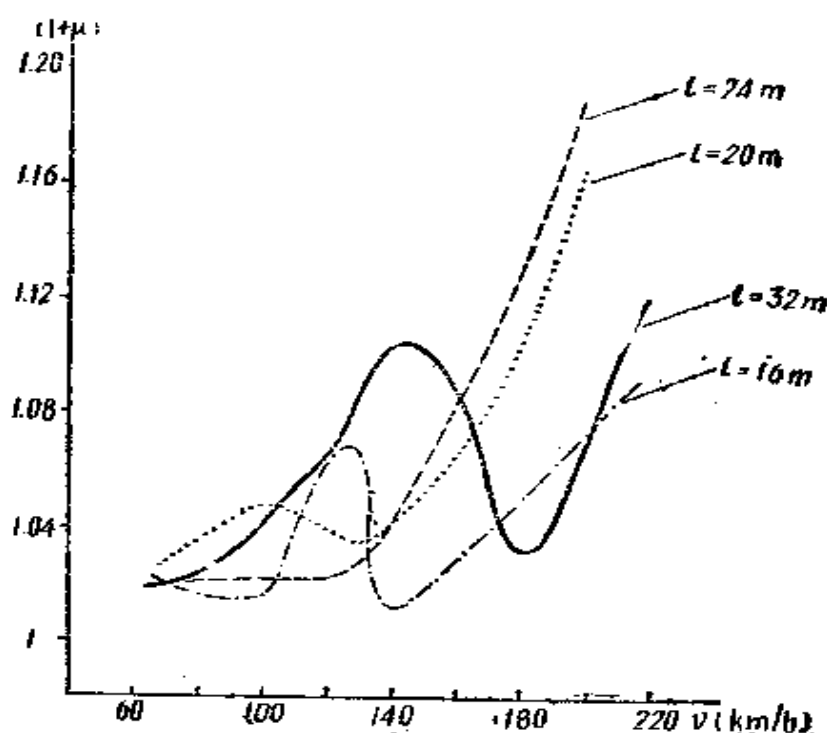


图6—10 中小跨度预应力混凝土桥梁车速和冲击系数关系

从图中可以看到，在常用速度范围内（即速度小于120 km/h），冲击系数随着速度的增大而增加，一般不超过1.07。

在图6—10中还值得指出的是，当列车速度达到高速范围（速度超过160 km/h）时，冲击系数将随着车速的增大迅速地增加，这个现象可以作如下解释，按机车型号的不同，一般货车转向架的间距约8.5m至12m，当车速为160km

/h(相当于44.4m/s)时:

$$8.5/44.4=0.191s$$

相当于每隔 0.191s 有一只转向架作用在跨中一次 (频率为 5.22), 这种活载频率接近于桥梁自振频率 (图 3—5)。

### (三) 机车竖向振动加速度

图 6—11 中表示当车速为 160km/h 时第一机车车头和车尾的竖向振动加速度。由于几只转向架是每隔一段距离后逐个进桥, 因此曲线并不连续。第一机车车头或车尾加速度的最大值是出现在第一转向架开始出桥的时刻, 这是因为在支点附近, 桥跨结构下挠使轨道表面出现折角的原因。

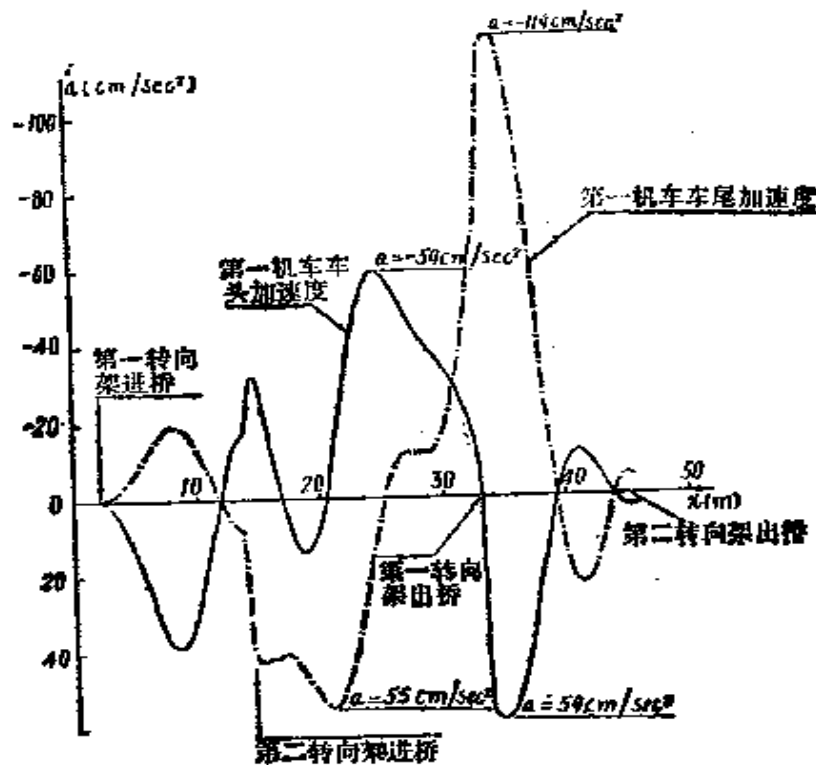


图 6—11 第一机车车头及车尾加速度  
(计算跨度 32m, 速度 160km/h)

图 6—12 表示第一机车和第二机车竖向振动加速度与车速之间的关系，加速度明显地随着速度增大而增加。当车速为 160 km/h 时，加速度最大值为  $1.2 \text{ m/sec}^2$  约为  $0.122g$ 。

#### (四) 轮重变化率

图 6—13 表示各个转向架下车轮轴重变化率  $r$ ，从图中可见，即使车速达到 160 km/h，轴重变化率  $r$  仍保持 97% 以上，对不脱轨安全度说来是有足够保证的。

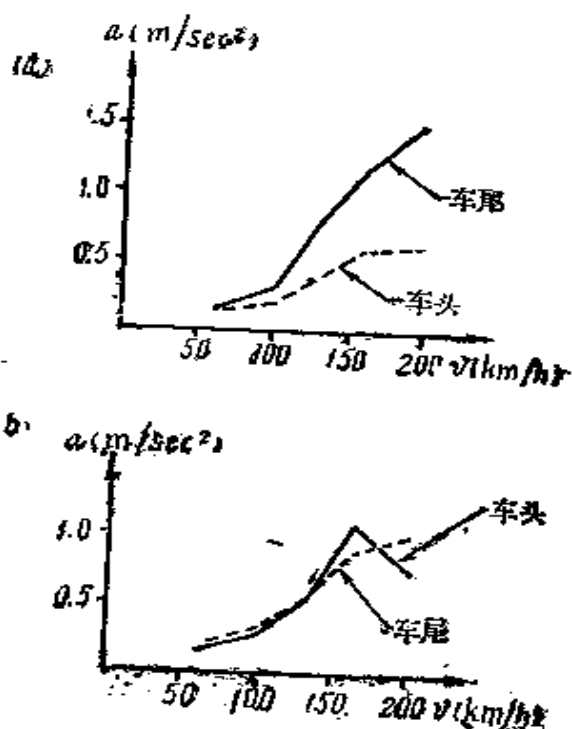


图 6—12 机车竖向加速度最大值和速度的关系

(a) 第一机车

(b) 第二机车

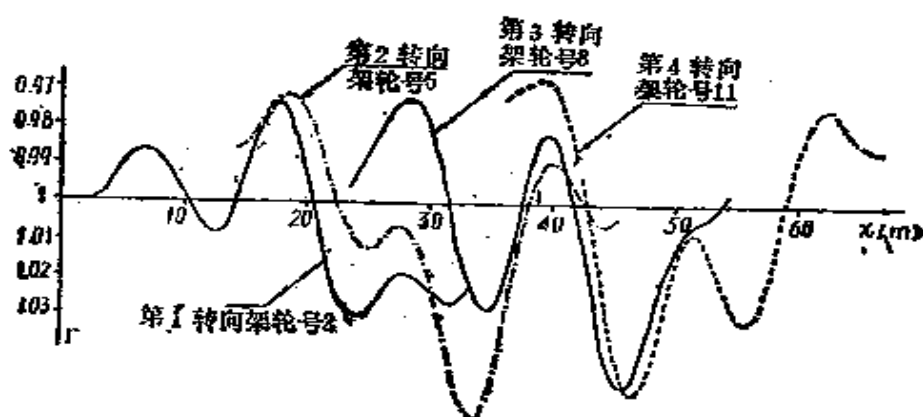


图 6—13 轮重变化率  
(计算跨度 32 m, 速度 160 km/h)

## 第六节 钢桁梁桥竖向振动分析算例

### (一) 桥梁结构计算图式

图 6—14 表示一简支钢桁梁桥，采取第三章第一节的假定，即将静载质量集中于各节点，桁架杆件在节点处为铰接，按杆件系统有限单元法列出其动力平衡方程如下：

$$[M]\{\ddot{U}\} + [C]\{\dot{U}\} + [K]\{U\} = \{F(x, t)\} \quad (6-16)$$

式中  $\{U\}$  表示各节点的竖向及横向位移列矩阵， $\{F(x, t)\}$  则表示由外荷载作用在各节点处竖向及横向动力荷载。

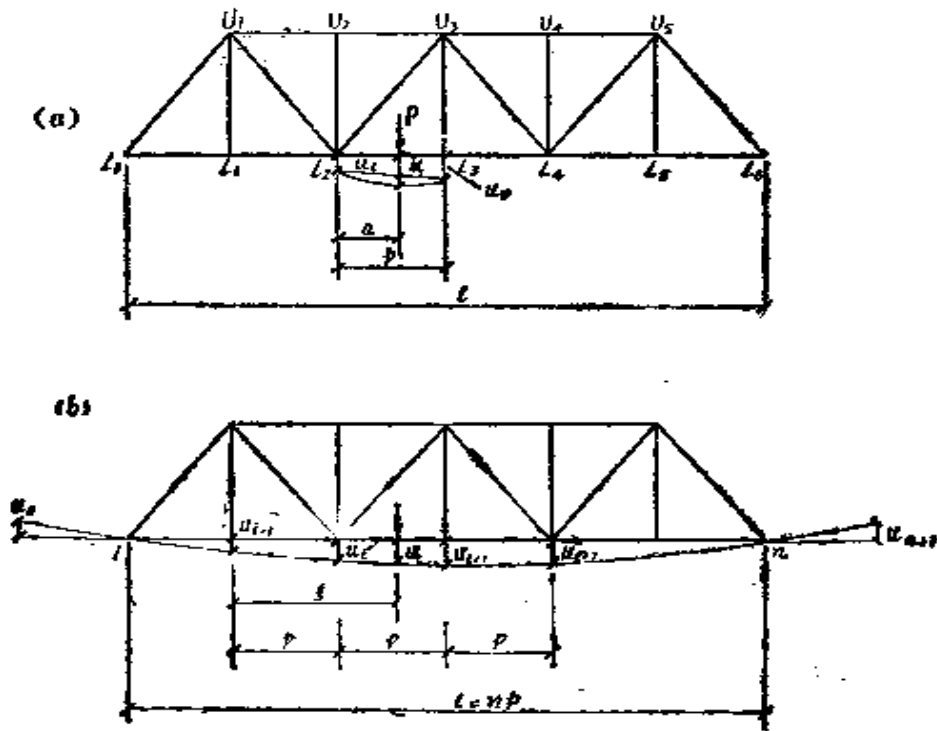


图 6—14 车轮竖向挠度

车轮荷载是作用在纵梁上，纵梁可以当作简支梁将荷载传至各节点处。

### (二) 车轮竖向位移的确定

在式 (6—16) 中只能解出桁梁各节点的位移, 而车轮是作用在节间纵梁上的, 因此车轮的位移要由下列两种方法求出。

(1) 简支梁挠度法: 假设桥道纵梁是简支梁, 而车轮所在节间的左节点竖向位移为  $u_l$ , 右节点竖向位移为  $u_r$ , 则车轮的竖向位移  $u$  可以表示为 (图 6—14a) :

$$u = u_l + (u_r - u_l)a/p + \frac{Pa^2(p-a)^2}{3pEJ} \quad (6-17)$$

上式等号右端第三项表示相应简支梁的挠度。

(2) 样条函数法: 将桥道纵梁的挠度用下列三次抛物线表达 (图 6—14b)。

$$u = c + c_1\xi + c_2\xi^2 + c_3\xi^3 \quad (6-18)$$

上式中  $c$ 、 $c_1$ 、 $c_2$  及  $c_3$  为待定常数, 可由下列左右四个节点的挠度定出。

$$\left. \begin{array}{ll} \xi = 0 & u = u_{i-1} \\ \xi = p & u = u_i \\ \xi = 2p & u = u_{i+1} \\ \xi = 3p & u = u_{i+2} \end{array} \right\} \quad (6-19)$$

上式中  $u_{i-1}$ 、 $u_i$ 、 $u_{i+1}$  及  $u_{i+2}$  表示车轮所在节间的左端及右端各两个节点位移值, 这些数值可由式 (6—16) 解出。将上述  $u_{i-1}$  等四个数代入式 (6—18), 可以得出求  $c$ 、 $c_1$ 、 $c_2$  及  $c_3$  的联立方程如下:

$$\left. \begin{array}{l} c = u_{i-1} \\ c + c_1p + c_2p^2 + c_3p^3 = u_i \\ c + c_1(2p) + c_2(2p)^2 + c_3(2p)^3 = u_{i+1} \\ c + c_1(3p) + c_2(3p)^2 + c_3(3p)^3 = u_{i+2} \end{array} \right\} \quad (6-20)$$

当车轮在第一节间和最后一个节间时, 根据边界条件,



可以增添两个虚拟节点，即：

$$\left. \begin{aligned} u_0 &= -u_2 \\ u_{n+1} &= -u_{n-1} \end{aligned} \right\} \quad (6-21)$$

### (三) 计算成果：

图 6—15 至 6—18 中表示跨度为 48.78m 的钢桁梁，当列车（三节车辆）以 96km/h 通过时，桁梁跨中挠度以及弦杆、吊杆和腹杆的杆力变化图。

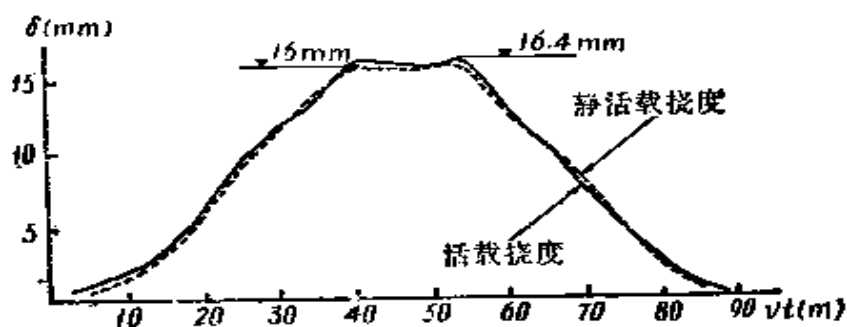


图 6—15 三节车厢通过时桥梁的跨中挠度 ( $v = 96 \text{ km/h}$ )

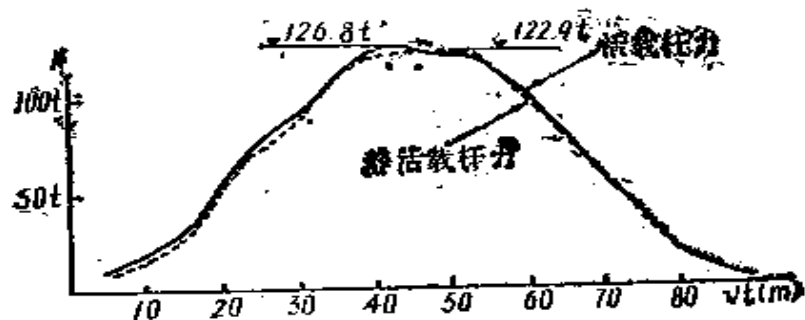


图 6—16  $L_2L_3$ 杆力

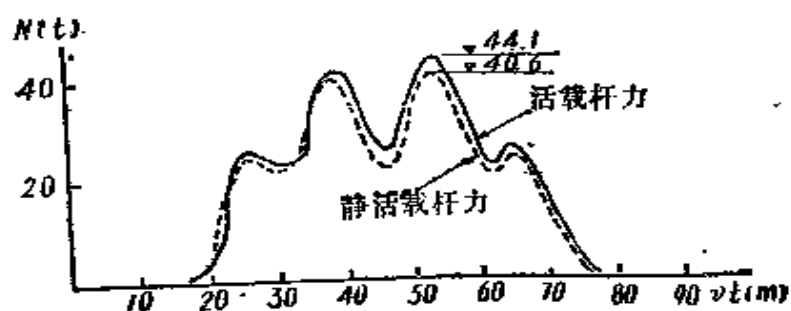


图 6—17  $U_2L_1$ 杆力

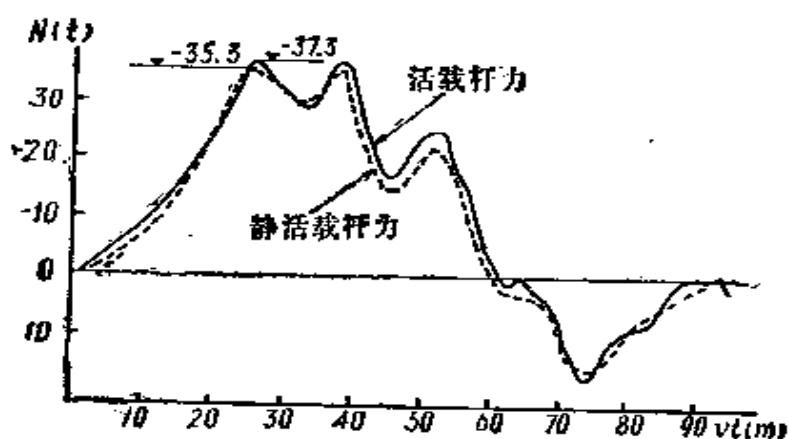
图 6-18  $U_1L_1$  杆力

表 6-4 中表示各根杆件杆力以及跨中挠度的冲击系数值。

表 6-4

杆 件	最大静活 载杆力 t	车体无初始位移		车体有1.27cm 初始沉浮振动	
		最大活载杆力 t	冲击系数 %	最大活载杆力 t	冲击系数 %
$L_1L_2$	71.11	72.196	1.53	75.65	6.38
$L_2L_3$	122.99	126.77	3.1	134.82	9.6
$L_3L_4$	71.11	71.25	0.2	78.28	10.1
$U_1L_1$	40.58	42.77	5.4	44.76	10.3
$U_1L_2$	68.97 -5.34	72.55 -3.44	5.2	69.89 -3.17	1.3
$L_2U_2$	15.62 -35.27	15.04 -36.47	3.4	16.34 -38.64	9.6
$U_2L_3$	40.58	44.06	8.6	46.96	15.7
$U_2L_4$	15.62 -35.27	15.63 -37.28	5.7	15.63 -37.28	5.7
$L_3U_3$	68.97 -5.34	71.74 -3.30	4.0	72.03 -3.57	4.4
$U_3L_4$	40.58	41.92	3.3	45.54	12.22
$U_1U_2$	-112.54	-115.40	2.54	-115.30	2.45
$U_2U_3$	-112.54	115.00	2.2	-118.80	5.6
跨中挠度 mm	16.004	16.436	2.69%	17.742	10.86%

从上列计算成果中，可以得出下列几点：

(1) 桥梁的挠度及动载杆力与相应静止活载的图形基本相似。

(2) 由于这里没有考虑轨面不平顺以及桥头线路影响等因素，因此只表示活载以一定速度过桥的动力因素。

(3) 跨中挠度的冲击系数与弦杆的冲击系数基本上相同，约1.5~3.1%，比中、小跨度桥梁的冲击系数小。

(4) 吊杆及腹杆的冲击系数比弦杆的冲击系数大，约3.3~8.6%。如考虑到车体初始振动，冲击系数要增大。

### 第七节 轨面不平顺对桥梁结构 竖向振动的影响

轨面不平顺是指列车通过时，钢轨走行面的不平顺。通常有两种表达方式，一种称为静不平顺，也称为几何不平顺，这是由于钢轨顶面的不均匀磨损以及道床或路基的永久变形所造成；另一种称为动不平顺，也叫做力学不平顺，即在列车荷载作用下，由于钢轨接头、钢轨基础弹性不均匀、扣件不密贴或部分轨枕失效等原因，使钢轨下沉不均匀。对于桥梁结构以及车体振动来说，主要应当研究轨道的动不平顺。

列车通过时的轨面不平顺，应包括轨道竖向标高不平顺、轨道中心线偏差、左右轨高差以及轨距偏差等四种\*。对于桥梁及车体的竖向振动，是与轨面的竖向标高不平顺有关。

#### (一) 轨面不平顺的表达

轨面竖向不平顺是由两部分所组成，一部分是由轨道接头所形成的周期性不平顺；另一部分则是由于道床、轨枕等

---

\* 详见第七章第一节

刚度不均匀所形成的随机部分。

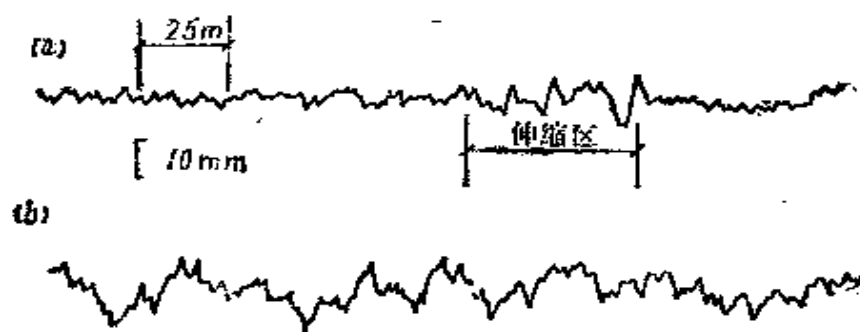


图 6—19 轨面竖向不平顺示例  
(a) 无缝线路 (b) 有缝线路

图 6—19 表示有缝及无缝线路上轨面的高低不平顺。从图中以及其他测量数据中明显地反映出，无缝线路的不平顺程度比有缝线路好得多。图 6—20 表示有缝及无缝线路轨面不平顺谱密度，同一频率条件下( $\Omega$ )，有缝线路轨面不平顺谱密度  $G(\Omega)$  比无缝的约大 10 倍<sup>[22]</sup>。

图 6—21 中表示同一种轨道构造条件下(50kg 钢轨、短轨、混凝土轨枕、碎石道床)，由于养护状态的好与差，轨面不平顺的差别。

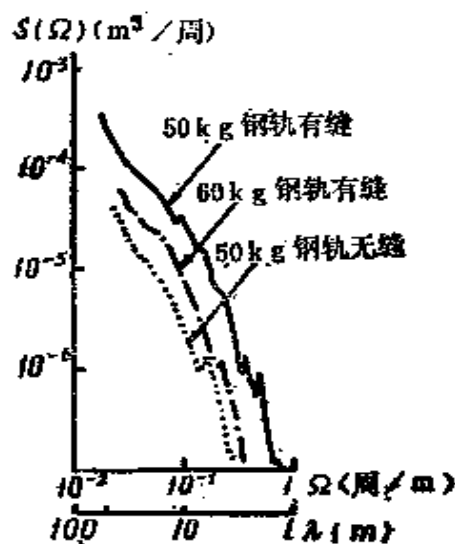


图 6—20 谱密度示例

我国线路上钢轨长度大部分是 25m，因此在小跨度桥梁上可尽量避免出现钢轨接头。

如桥跨结构上没有钢轨接头，则每一对车轮经过接头处，都将产生一次冲击。设货物列车转向架间距为 8 m，则

由于车轮经过接头所引起的冲击频率为:

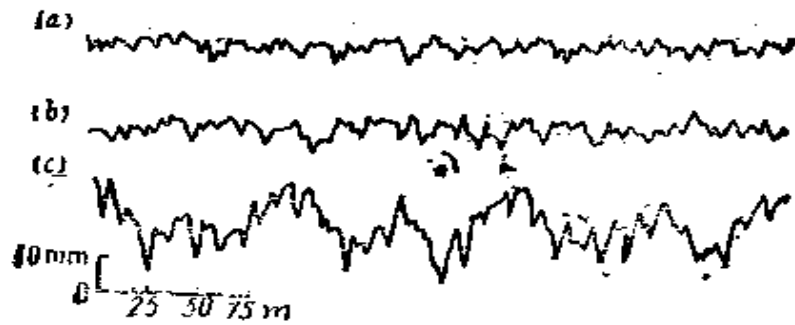


图 6—21 不同养护条件下的轨面竖向不平顺  
(a) 好 (b) 中等 (c) 差

当车速为:  $v = 60 \text{ km/h} = 16.7 \text{ m/s}$ ; 冲击频率  $f = 16.7/8 = 2.09 \text{ Hz}$

当车速为:  $v = 100 \text{ km/h} = 27.8 \text{ m/s}$ ; 冲击频率  $f = 27.8/8 = 3.48 \text{ Hz}$

对于一座中等跨度 ( $l = 64 \text{ m}$ ) 的钢桁梁桥, 钢轨接头所引起的冲击频率与其加载后的自振频率比较接近, 因此应当尽量避免在桥梁跨中设置钢轨接头。

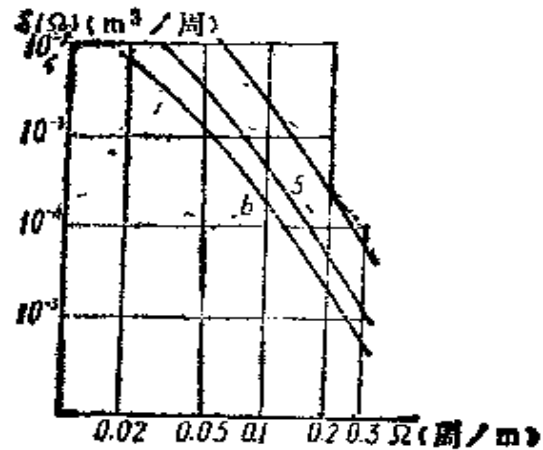


图 6—22 不同线路等级的谱密度曲线

由于道床和轨枕等刚度不均匀所形成的轨面不平顺是随机的。霍博尔脱 (Houbolt J. C.) (1961) 和科尔曼 (Coleman T. L) (1963) [5] 曾根据当时人工测量的资料整理, 提出如下谱密度表达式:

$$S(\Omega) = A/\Omega^2 \quad (6-22)$$

式中  $\Omega$ ——频率 (周/m)

$A$ ——不平顺程度, 对于铁路轨面不平顺可按养护条

件优劣采用:

$A = 10^{-8} \text{m}^2 \cdot \text{周}/\text{m} \cdots \cdots$  养护条件良好

$A = 10^{-6} \text{m}^2 \cdot \text{周}/\text{m} \cdots \cdots$  养护条件差

如式 (6—22) 所示谱密度表达方式, 也曾被用来表达公路以及飞机场跑道的表面不平顺。

1972年, 美国开始使用有自动记录并辅有计算机数据处理的轨道检查车, 科尔宾 (Corbin J. C)<sup>(5)</sup> 根据实测资料, 提出了比较详细的轨面不平顺公式及有关常数。

$$S(\Omega) = \frac{2\pi A_0 \Omega_c^2}{(\Omega^2 + \Omega_c^2) \Omega^2} \quad (6-23)$$

式中有关常数  $A_0$ 、 $\Omega_c$  是与线路等级有关, 可参见表 6—5。图 6—22 中表示线路等级为 6、5 以及 3 时的谱密度曲线。

按美国铁路线路等级而定的不平顺常数 表 6—5

线路等级	$2\pi A_0$ (m·周)	$\Omega_c$ (周/m)
1	$3.363 \times 10^{-4}$	0.131
2	$1.211 \times 10^{-4}$	0.131
3	$0.413 \times 10^{-4}$	0.131
4	$0.303 \times 10^{-4}$	0.131
5	$0.0762 \times 10^{-4}$	0.131
6	$0.0365 \times 10^{-4}$	0.131

## (二) 考虑轨面不平顺的随机振动分析

如在桥梁竖向振动分析中, 考虑轨面不平顺这个因素, 则称为随机振动分析。通常, 对于比较简单的随机振动方程, 可以用传递函数方法求解, 即输出信息等于输入信息乘上传递函数。桥梁竖向振动动力方程是一个变系数偏微分方程, 不能直接用传递函数方法求解, 要用数值解法。即将计算机模拟轨高不平顺随机函数, 输入机器, 再用逐步推进法求输出

解。与本章第三节相同，先列出桥梁及车体动力平衡方程，其中车轮的竖向位移可以表示为：

$$\left. \begin{aligned} y_i &= y(x_i, t) + w(x_i) \\ x_i &= vt - a_i \end{aligned} \right\} \quad (6-24)$$

式中  $y_i$  ——表示第  $i$  只车轮的竖向位移

$w(x_i)$  ——表示车轮所在地点轨面的竖向不平顺高度

$w(x_i)$  是一个随机函数，其谱密度可以表示为式 (6-23)。对于这样一个随机函数，可以在计算机上，按下列步骤模拟产生。

(1) 首先模拟产生一个均匀分布于 (0, 1) 的随机数  $u_i$ ，可以采用下列累乘法 (multiplicative method) 模拟产生：

$$u_i = a u_{i-1} \pmod{m} \quad (i=1, 2, 3 \dots n) \quad (6-25)$$

式中  $a$  ——乘数

$u_0$  ——起始值

$m$  ——模数

当使用式 (6-25) 时， $u_0$  可以取任何小于  $m$  的正整数，当  $a$  乘  $u_{i-1}$  超过模数  $m$  时，扣除  $m$  的整数倍，留下余数继续计算，产生下一个随机数。由式 (6-25) 所得  $u_i$  除以  $m$  即得均匀分布于 (0, 1) 的随机数。

如  $m$  为素数 (prime)， $a$  是  $m$  的素元模 (primitive element modulo)，即：

$$a^l - 1 \equiv 0 \pmod{m}; \quad l = m - 1 \quad (6-26)$$

则式 (6-25) 所产生的随机数列一定是全周期的，即自 1 至  $m-1$  个数。根据研究成果<sup>[6]</sup>，针对不同计算机可分别采用下列  $m$  及  $a$  值。

字长为36位的计算机:  $m = 2^{35} - 31 = 34,$

359, 738, 337

$a = 5^5 = 3125$

字长为32位的计算机:  $m = 2^{31} - 1 = 2,$

147, 483, 647

$a_1 = 7^5 = 16807$

或  $a_2 = 630,360,016$

(6-27)

上式中,  $a$  是  $2^{35} - 31$  的素元模,  $a_1$  和  $a_2$  都是  $2^{31} - 1$  的素元模。

(2) 将均匀分布随机数  $u_i$  转换成正态分布随机数  $x_i$ , 可以将每一对  $(u_i, u_{i+1})$  值按下列公式转换:

$$\left. \begin{aligned} x_i &= \delta \sqrt{-2 \ln u_i} \cos(2\pi u_{i+1}) \quad (i=1, 3, 5 \cdots n-1) \\ x_{i+1} &= \delta \sqrt{-2 \ln u_i} \sin(2\pi u_{i+1}) \quad (i=1, 3, 5 \cdots n-1) \\ \delta &= \sqrt{2\pi^2 A_v \delta_r} \end{aligned} \right\}$$

(6-28)

上式中  $x_i (i=1, 2, \cdots n)$  是平均值为 0, 均方差为  $\sigma$  的正态分布随机数。在  $\sigma$  式子中,  $A_v$  表示轨面不平顺常数见表 6-5,  $\delta_r$  表示轨面不平顺计算点的间距, 如计算长度为  $l$  则  $\delta_r$  可表示为:  $\delta_r = l/(n-1)$  (6-29)

(3) 通过下列二次滤波过程 (Second order filter) [7], 由随机变量  $x_i$  转而产生随机过程样本函数  $y_i$ ,  $y_i$  的谱密度为式 (6-23)。

$$y_i = (\bar{\alpha} + 1)y_{i-1} - \bar{\alpha}y_{i-2} + (1 - \bar{\alpha})x_i$$

(6-30)

式中  $\bar{\alpha} = e^{-\delta_r \omega_c}$

图 6-23 是表示按线路等级为 6, 所模拟的轨面不平顺



的一个样本。



图 6—23 轨面竖向不平顺的样本 (线路等级 6)

### (三) 考虑轨面不平顺的计算成果

由于桥头线路有轨面不平顺, 因此车辆在线路上行驶时, 产生竖向及横向振动。车辆带着这种初始振动状态上桥, 对桥梁带来附加的冲击。通常, 桥上轨面不平顺的程度比线路上好, 因为在桥上没有路基变形不均匀的影响, 中等跨度以及大跨度钢梁桥上常用明桥面, 也更没有道床变形的影响。

在表 6—6 中, 表示当考虑以及不考虑轨面不平顺时的活载杆力<sup>[1]</sup>, 其中桥上线路不平顺等级为 6, 桥头线路不平顺等级也取 6。从表中可见, 由于线路不平顺, 使杆力冲击系数普遍地增大。

表 6—6

杆 件		静活载杆力 t	不计轨面不平顺		考虑轨面不平顺	
			活载杆力 t	冲击系数 %	活载杆力 t	冲击系数 %
弦 杆	$L_1 L_1$	61.42	62.52	1.80	64.92	5.69
	$L_2 L_2$	100.33	101.36	1.03	104.29	3.95
	$U_1 U_1$	-119.10	-120.59	1.25	-121.19	1.76
	$U_2 U_2$	-115.82	-117.55	1.49	-118.90	2.66
	$U_3 U_3$	-99.42	-100.49	1.07	-103.17	3.77

续上表

杆 件		静活载杆力 t	不计轨面不平顺		考虑轨面不平顺	
			活载杆力 t	冲击系数 %	活载杆力 t	冲击系数 %
竖 杆	$U_1 L_1$	43.83	45.54	3.89	52.05	18.76
	$U_2 L_2$	-37.46	-38.54	2.88	-41.04	9.54
	$U_3 L_3$	-9.54	-10.09	5.76	-12.18	27.67
腹 杆	$U_1 L_4$	-105.77	-107.51	1.64	-110.16	4.15
	$U_1 L_2$	78.74	78.69	-0.06	81.37	3.34
	$U_2 L_3$	48.76	50.17	2.88	53.42	9.54
	$U_3 L_4$	12.41	13.13	5.83	15.87	27.84

注: (车速为80.5km/h)

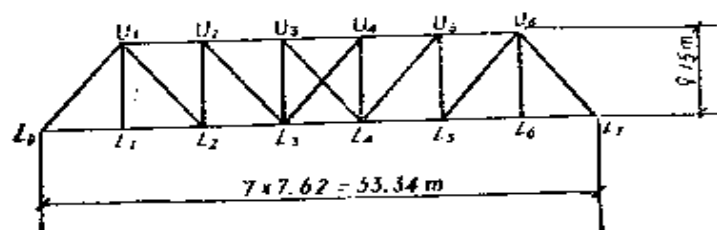


图 6—24 桁梁计算图式

## 第八节 桥梁振动实测资料及规定

建国30多年来,铁道部所属各桥梁检定队曾对铁路桥梁作了大量的实测工作,并制订了铁路桥梁检定规范。

图 6—25中表示一座跨度为89.38m桁梁桥的现场实测记录。试验列车为两台解放型蒸汽机车加三节货物车厢。图 6—26中表示在不同车速时的冲击系数值。从图中可见临界速度约为31~36km/h,按第三章图 3—5可得临界速度为34km/h。

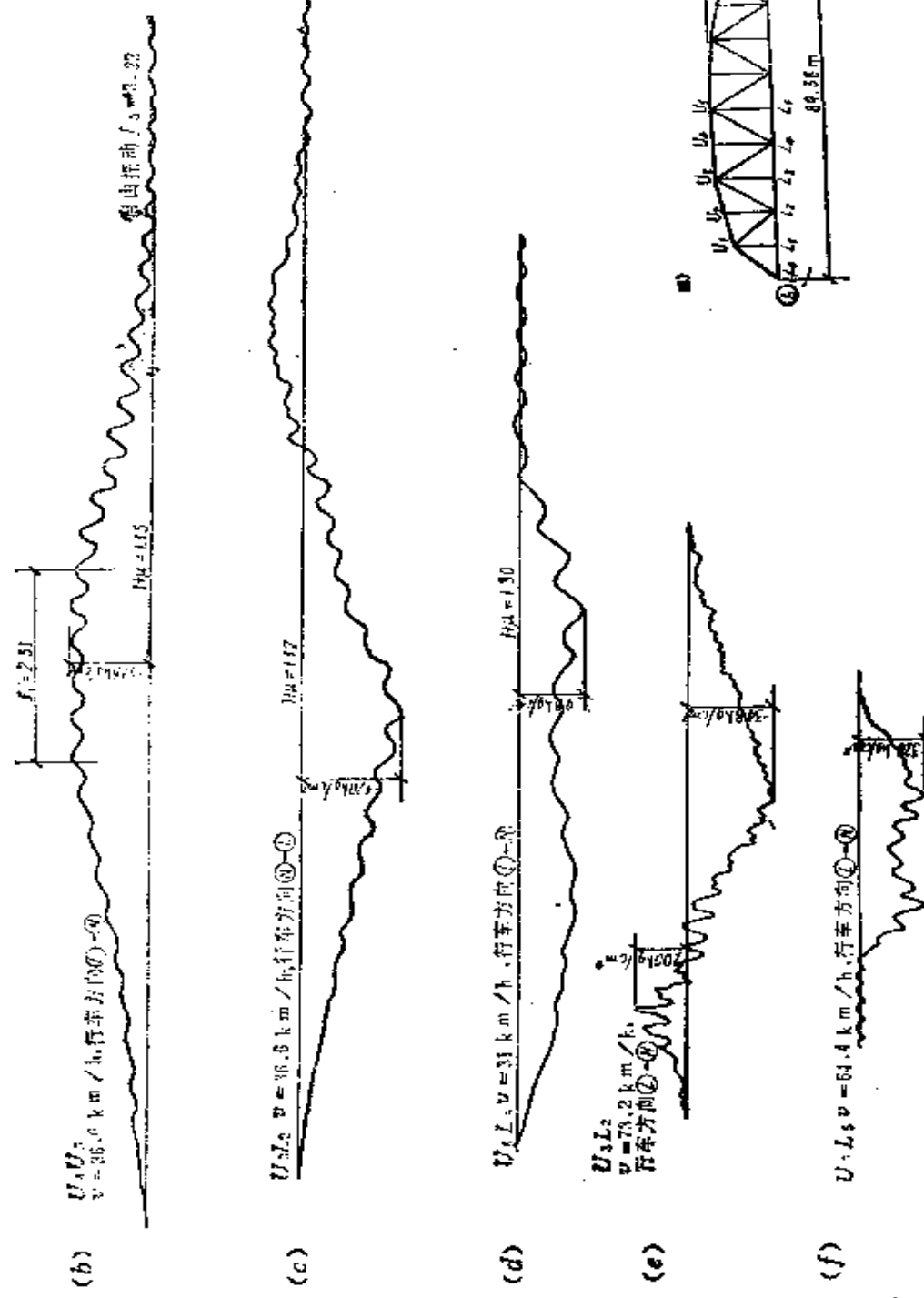


图 6-25 桁梁桥现场实测记录 (各种杆件杆力)

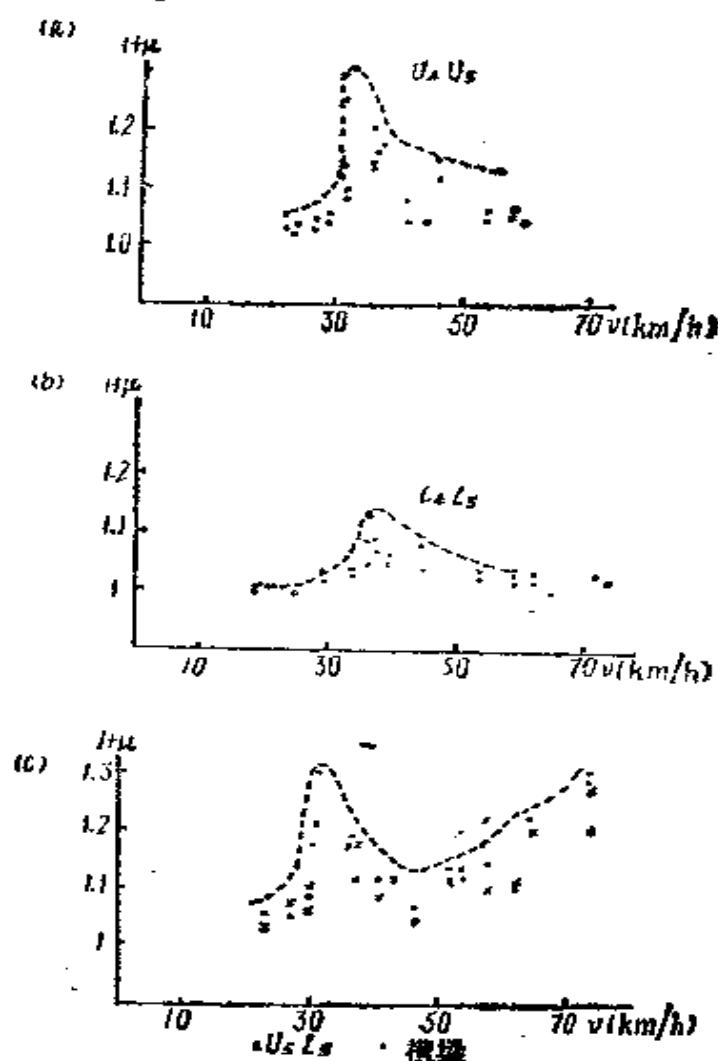


图 6—26 不同车速时杆件的冲击系数值

图 6—25 b、c 表示弦杆及斜杆的杆力实测曲线，当车速为  $36.6\text{km/h}$  ( $10.16\text{m/sec}$ ) 时，由动轮偏心块所引起的强迫振动频率  $f$  可按下式计算。

解放型机车动轮直径为  $1.37\text{m}$ ：

$$\therefore f = \frac{v}{\pi D} = \frac{10.16}{\pi \times 1.37} = 2.36\text{Hz}$$

实测强振频率为  $2.31\text{Hz}$  (图 6—25 b)。

从图 6—25 *b* 与 *d* 比较中可见, 吊杆的冲击系数明显地比弦杆大。

图 6—27 中表示一座跨度为 48m 定型设计桁梁桥的实测记录。该桥用蒸汽机车 (前进型) 和内燃机车 (NY<sub>6</sub>) 分别进行试验。从图 6—27 *a* 和 *b* 比较中可见, 蒸汽机车是当临界速度时, 弦杆杆力冲击系数为 1.25, 内燃机车无明显的临界速度, 当车速达 137 km/h 时, 弦杆杆力冲击系数为 1.23。

在我国铁路桥梁检定规范中规定:

(1) 当蒸汽机车的运行速度小于桥跨的临界速度时, 冲击系数  $1 + \mu$  值可乘上折减系数  $\alpha$ 。

$$\alpha = \frac{v}{2v_k - v} \quad (6-31)$$

(2) 内燃机车、电力机车及车辆运行速度在 60~120 km/h 范围内时, 冲击系数  $1 + \mu$  可按蒸汽机车  $1 + \mu$  值的 75% 计算。

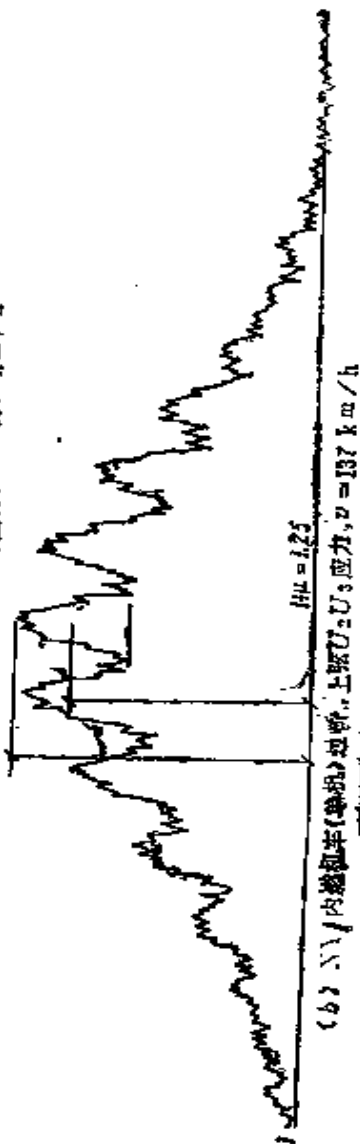
(3) 内燃机车、电力机车及车辆运行速度在 60 km/h 以下时, 冲击系数  $1 + \mu$  可乘上折减系数  $\alpha$ 。

$$\alpha = \frac{v}{60} \quad (6-32)$$

西欧国际铁路联盟试验研究所 (ORE), 根据大量现场实测资料, 订出冲击系数  $1 + \mu$  公式如下 (该式不包括动轮偏心块的锤击影响) [23],

$$\left. \begin{aligned} 1 + \mu &= 1 + \varphi' + \varphi'' \\ \varphi' &= \frac{K}{1 - K + K^4} \\ \varphi'' &= \frac{a}{100} \left[ 56e^{-\frac{l^2}{100}} + 50 \right. \\ &\quad \left. \times \left( \frac{n_0 l}{30} - 1 \right) e^{-\frac{l^2}{400}} \right] \end{aligned} \right\} \quad (6-33)$$

(a) 前进型蒸汽机车(单机)过桥, 上弦 $U_2U_3$ 应力,  $v=55.7 \text{ km/h}$



(b) N\N'内燃机车(单机)过桥, 上弦 $U_2U_3$ 应力,  $v=137 \text{ km/h}$

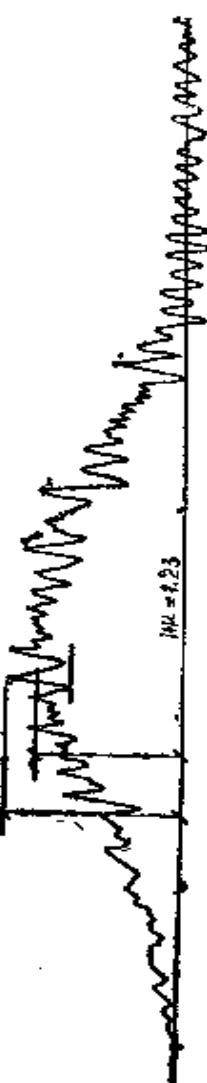


图 6-27 跨度 48 m 定型钢桁梁上弦应力实测纪录

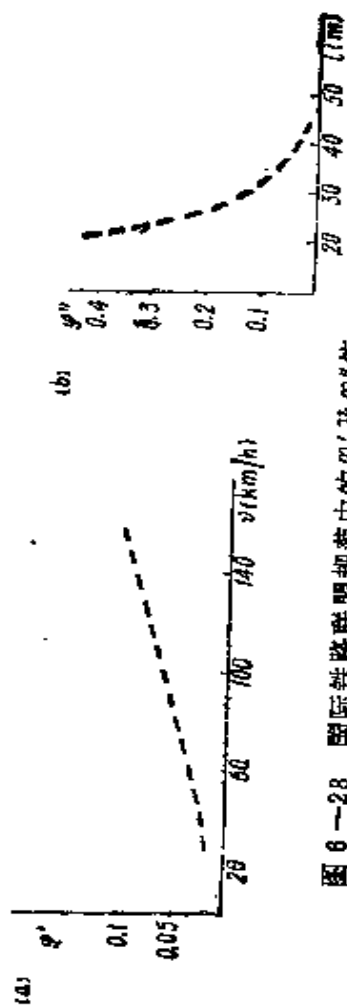


图 6-28 国际铁路联盟规范中的  $\phi'$  及  $\phi''$  值

式中  $K = \frac{v}{2fl}$

$v$  —— 车速 (m/sec) , 当  $v < 22\text{m/sec}$  时;  $\alpha = v/22$   
 $v > 22\text{m/sec}$  时;  $\alpha = 1$

$e = 2.71828$ ,  $f$  —— 桥梁自振频率,  $l$  —— 跨度 (m) 。

上式中  $\varphi'$  表示车速  $v$  对于冲击系数的影响值,  $\varphi''$  则表示轨面不平顺的影响, 利用经验公式 (6—33) 可将  $\varphi'$ 、 $\varphi''$  表示成图 6—28, 从图中可见, 冲击系数随着车速增加而增大, 然而即使车速达到 160km/h, 由于车速所引起的  $\varphi'$  值不超过 10%。轨面不平顺影响  $\varphi''$  则随着跨度增加而减小。

## 第七章 列车过桥时桥梁 横向振动概述

当列车通过桥梁时，桥梁要产生竖向和横向振动。对于竖向振动，近年来随着高速铁路的发展，国内外均已进行了不少理论分析。然而，对于横向振动的研究进行得比较少。这是由于下列两方面的原因：

一方面一般中、小跨度下承式桥梁，由车辆限界所确定的桥梁结构横向宽度，常常已能保证车辆平稳地通过；另一方面由于涉及桥梁横向刚度的许多因素，如轨面不平顺和轮轨间蛇行等均是随机变量，计算很复杂。

对于大跨度桥梁，特别是单线的，桥梁横向刚度问题常常显得很突出，是设计规划中必须解决的重要课题。

至今对于列车通过时，桥梁横向振动的研究还做得很不够。在本章内，将介绍影响桥梁横向振动的主要原因、计算分析的特点以及实测资料。

### 第一节 引起桥梁横向振动的主要原因

列车通过桥梁，引起桥梁横向振动的原因很多，下面介绍其中几个主要因素。

#### （一）蒸汽机车动轮偏心块影响

蒸汽机车动轮左右偏心块的相角相差 $90^\circ$ ，因此由于偏心块的离心力，不仅引起桥梁竖向振动，还引起桥梁横向振动。

#### （二）运动中列车的横向加速度



列车在直线线路上运行时, 由于轨面不平顺, 车体要产生竖向和横向加速度, 车体带着这个初始加速度上桥, 通过现场测量, 可以得出车体横向加速度和车速间关系。

通常车体横向加速度用下列两个指标表达, 即“平均值”和“最大值”。具体方法为, 在每段记录 (约  $6 \sim 8$  s) 波形中选取 6 个最大值, 然后将每个速度级中所取出的最大值, 求其平均值作为“平均值”, 在其所有数值中选取一个最大的数值作为“最大值”。

由于线路技术条件的不同, 实测横向加速度的数值也有所差别。我国铁道部科研院以及车辆厂等单位曾进行大量实测工作。在表 (7—1) 及 (7—2) 中列出货物车厢 (敞车) 以及内燃机车在不同车速时的横向加速度值大致趋势 (20.21)。

货物车厢在直线线路上运行时的横向加速度 表 7—1

列车速度	$v = 40 \sim 110 \text{ km/h}$
横向加速度平均值	$0.1g \sim 0.2g$
横向加速度最大值	$0.15g \sim 0.4g$

内燃机车在直线线路上运行时的横向加速度 表 7—2

列车速度 $\text{km/h}$	40	80	100
横向加速度平均值	$0.025g$	$0.045g$	$0.11g$
横向加速度最大值	$0.035g$	$0.062g$	$0.144g$

### (三) 轮轨间蛇行运动

由于车轮轮缘与钢轨侧面间有间隙, 因此在车辆前进中, 轮对中心与钢轨中心间有一定偏差  $y$  (图 7—1)。又由于车轮的踏面具有锥形 ( $1/20$ ), 偏差  $y$  促使左右轮的滚动直径不同, 见图 7—1 中  $r_1$  和  $r_2$ , 使车轮有减小偏差的

趋势，由此引起轮轨间反复的蛇行运动。

按一般刚体运动理论，可以推导出轮轨间蛇行运动频率如下<sup>〔13〕</sup>：

$$\text{按轮对蛇行：} f_1 = \frac{v}{2\pi} \sqrt{n/sr_0} ; \text{蛇行波长：} l_{s1} = v/f_1 \quad (7-1)$$

$$\text{按转向架整体蛇行：} f_2 = \frac{v}{2\pi} \sqrt{\left(\frac{n}{sr_0}\right) \frac{1}{(1+e^2/s^2)}}$$

$$\text{蛇行波长：} l_{s2} = v/f_2 \quad (7-2)$$

式中  $v$  —— 车速；

$n$  —— 踏面锥度

( $n = 1/20$ )；

$r_0$  —— 车轮半径

(货车  $r_0 = 0.42\text{m}$ )；

$s$  —— 轨距之半

( $s = 0.7175\text{m}$ )；

$e$  —— 转向架轴距之半。

当车速  $v$  为 60 km/h，取转向架轴距之半  $e$  为 0.86m (新转 6 型转向架)，则由上两式可得：

$$f_1 = 1.08$$

$$l_{s1} = 15.4\text{m}$$

$$f_2 = 0.69$$

$$l_{s2} = 24.1\text{m}$$

车轮经使用后，踏面锥度增大，使蛇行波长有增大趋势。

根据现场实测资料反映，当车速在 60~160km/h 范围

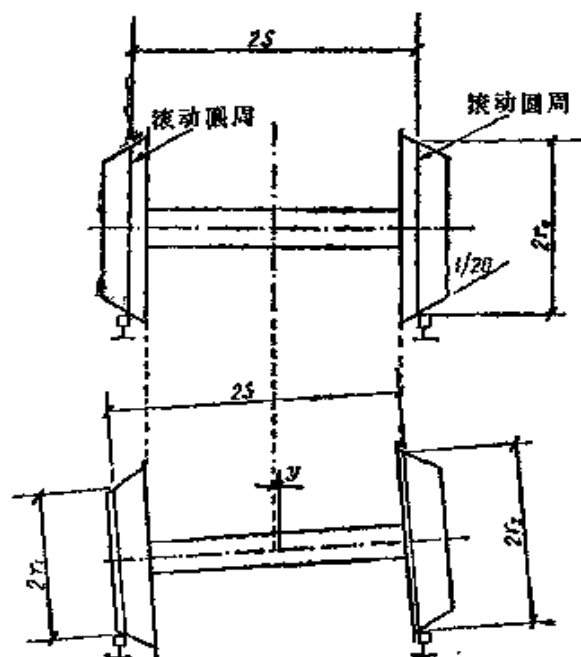


图 7-1 轮轨间蛇行运动

内，轮轨间蛇行频率在式（7—1）和式（7—2）之间，约为  $1 \sim 2 \text{ Hz}$ ，蛇行波长为  $14 \sim 22 \text{ m}$  <sup>(24、25)</sup>。

#### （四）轨面不平顺

在图 7—2 中表示左、右轨的位置，通常轨面不平顺应包括下列四种不同型式。

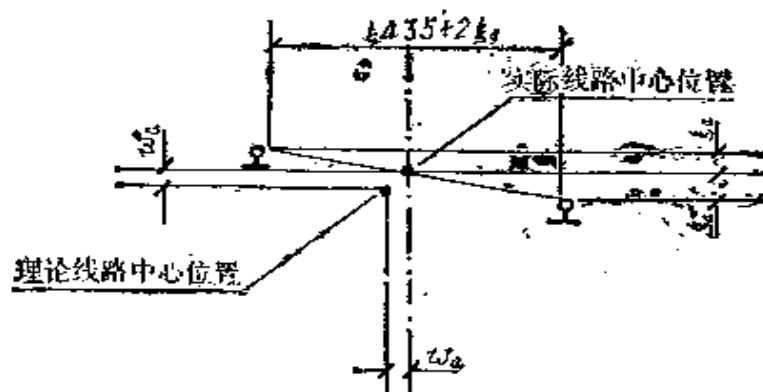


图 7—2 轨面不平顺示意图

（1）线路中心线的竖向标高偏差——高低不平顺  $w_c$ 。

（2）线路中心线的横向位置偏差——方向不平顺  $w_d$ 。

（3）左右轨竖向标高的偏差——歪扭不平顺  $2\xi_s$ 。

（4）左右轨间轨距偏差——轨距不平顺  $2\xi_g$ 。

科尔宾 (Corbin J, C) 根据现场实测资料的归纳，发现  $w_c$  和  $w_d$  有相似的谱密度，而  $\xi_s$  和  $\xi_g$  也有相似的谱密度，提出如下两个谱密度公式<sup>[6]</sup>。

$$\left. \begin{aligned} w_c \text{ 和 } w_d \text{ 的谱密度: } S(\Omega) &= \frac{2\pi A_c \Omega_c^2}{(\Omega^2 + \Omega_c^2) \Omega^2} \\ \xi_s \text{ 和 } \xi_g \text{ 的谱密度: } S'(\Omega) &= \frac{8\pi A_c \Omega_c^2}{(\Omega^2 + \Omega_c^2)(\Omega^2 + \Omega_s^2)} \end{aligned} \right\} \quad (7-3)$$

式中  $A_c$  及  $\Omega_c$  可见表 6—5， $A_s$  及  $\Omega_s$  见下表 7—3。

表 7—3

线路等级	$8\pi \cdot A$ (m·周)	$\Omega$ (周/m)
1	$4.845 \times 10^{-4}$	0.0962
2	$4.071 \times 10^{-4}$	0.1481
3	$2.725 \times 10^{-4}$	0.1356
4	$2.153 \times 10^{-4}$	0.1800
5	$0.840 \times 10^{-4}$	0.1306
6	$0.135 \times 10^{-4}$	0.0697

图 7—3 表示由计算机模拟  $\xi_s$  和  $\xi_r$  的样本 (线路等级为 6)。将图 7—3 与图 6—23 对照可见  $\xi_s$  和  $\xi_r$  的不平顺程度比  $w_s$  和  $w_r$  均大。

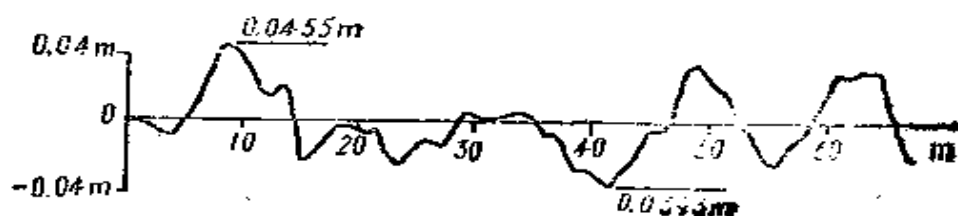


图 7—3 轨面不平顺样本 (轨距或左右轨高差) 线路等级为 6

## 第二节 桁梁桥横向振动分析概要

将机车 (或货物列车) 与桥梁作为一个联合动力体系考虑横向振动时, 机车 (或货物列车) 的车体部分要作为有 6 个变位自由度的刚性体 (图 7—4)。

然而, 如仅考虑机车 (或货物列车) 与桥梁的横向振动, 而不考虑竖向振动时, 由于横向振动的反对称性, 可以与竖向振动分开, 这时机车 (或货物列车) 的车体只要取 3 个变位自由度如 (图 7—4)。

(1) 横向位移  $u$

(2) 侧滚  $\phi$

### (3) 摇头 $\psi$

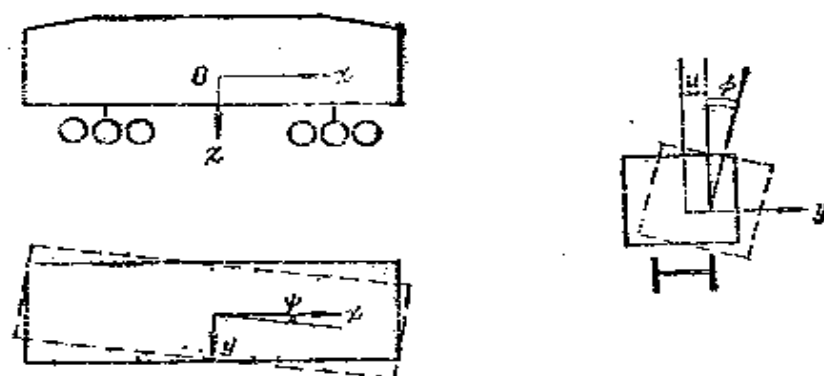


图 7—4 机车横向振动自由度

与第六章第三节相似,可分别列出其动力平衡方程<sup>[13]</sup>。

桁梁桥是一个空间杆件系统结构,忽略由于桁梁杆件在节点处刚性连接的影响,把桁梁当作一个空间铰接杆件系统结构。取任一节点横剖面,有四个节点 $a$ 、 $a'$ 、 $c$ 及 $c'$ (图 7—5 a),在空间振动中,每一节点都可能产生三个变位自由度,即:

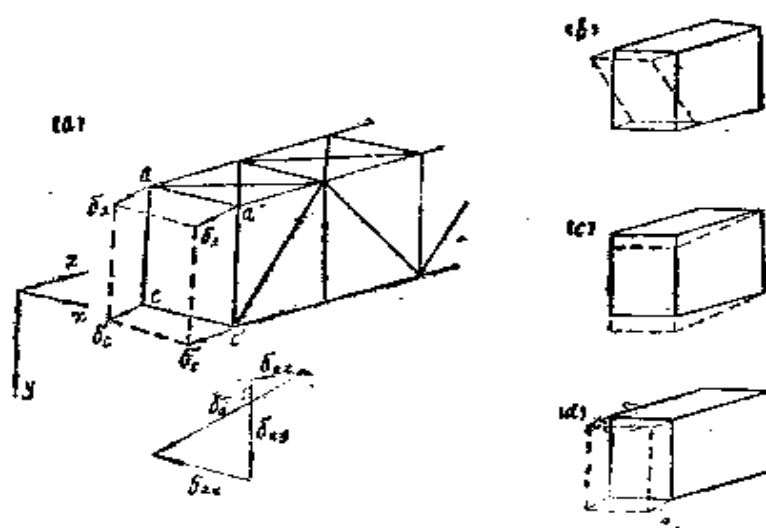


图 7—5 桁梁桥空间变形自由度

a点:	$\delta_{ax}$	$\delta_{ay}$	$\delta_{az}$
a'点:	$\delta_{a'x}$	$\delta_{a'y}$	$\delta_{a'z}$
c点:	$\delta_{cx}$	$\delta_{cy}$	$\delta_{cz}$
c'点:	$\delta_{c'x}$	$\delta_{c'y}$	$\delta_{c'z}$

共有12个变位自由度。

如仅考虑横向振动（即反对称变形部分），则可以将对称变形部分（对铅垂平面对称）分开，可减少三个自由度，即竖直平面内（ $yz$ 平面）的弯曲、剪切和纵向伸长（图7—5  $b$ 、 $c$ 、 $d$ ），因此变位自由度可减少到9个。

由于在空间变位中，与横剖面形状变化相比，横剖面杆件的伸长变形是次要因素，因此在空间振动分析中可不计这项变形，进一步可减少4个变位自由度即：

$$9 - 4 = 5$$

由此，在实际桁梁桥空间振动分析中，每一桁架节点横剖面有五个变位自由度。如整个桁架桥有 $(n+1)$ 节点（包括支座节点），则有 $5(n+1)$ 个变位自由度。

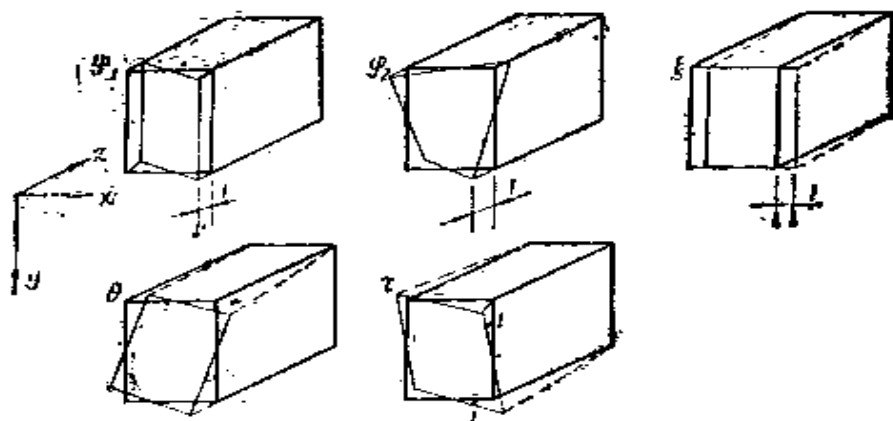


图7—6 桁梁桥横向振动变形模式

$\varphi_1$ ——截面绕 $y$ 轴转动； $\varphi_2$ ——截面凸凹； $\xi$ ——截面沿 $x$ 轴方向位移； $\theta$ ——截面绕 $z$ 轴转动； $\tau$ ——截面形状变化。

图7—6表示桁梁桥横向振动五个基本变形模式。这些

模式与铅垂平面成反对称。如桁梁的腹杆体系不是三角式，则要根据具体腹杆体系的特点，增加相应的变位自由度。

### 第三节 桁梁桥横向自振频率

按上一节的桁梁横向振动计算图式可以求出桁梁横向振动自振频率<sup>[26]</sup>，图 7—7 中表示桁梁桥横向自振频率实测值。从图中可见，横向自振频率  $f_H$  随着跨度的增加而减小，可近似地表示为：

$$f_H = 115/l \quad (7-4)$$

式中  $l$  表示跨度 (m)。

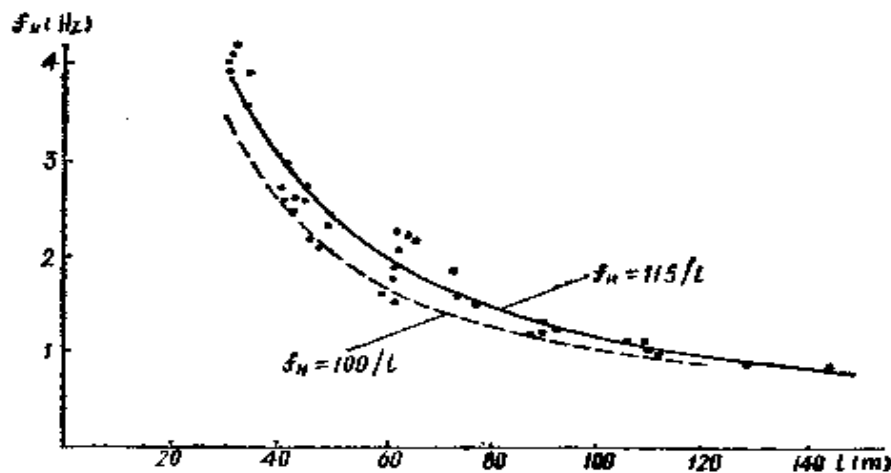


图 7—7 桁梁桥横向自振频率实测值

如表示为振动周期  $T_H$ ，则上式可改写成：

$$T_H = 0.0087l \quad (7-5)$$

在苏联桥梁设计规程 CH200—62 中曾提出，简支钢桁梁桥横向自振周期  $T$  应符合下式：

$$T \leq 0.01l$$

式中  $T$ ——周期 (s)；

$l$ ——桥梁跨度 (m)。

从图 7—7 中可见, 绝大多数桥梁结构的横向自振周期是能满足上式的。

#### 第四节 列车过桥横向振动实测成果介绍

##### (一) 基本情况

简支桁梁桥主要尺寸见图 7—8。测试时, 在桥上布置 6 只 CZ-S<sub>2</sub> 拾振器, 仪表位置见表 7—4。

表 7—4

编 号	仪表位置	方 向	量测内容
1	S 端桥门架顶	水 平	S 桥门架顶横向振幅
2	上弦跨中	水 平	上风架跨中横向振幅
3	下弦跨中	水 平	下风架跨中横向振幅
4	下弦(上游片)跨中	垂 直	主桁上游片垂直振幅
5	下弦(下游片)跨中	垂 直	主桁下游片垂直振幅
6	H 端桥门架顶	水 平	H 桥门架顶横向振幅

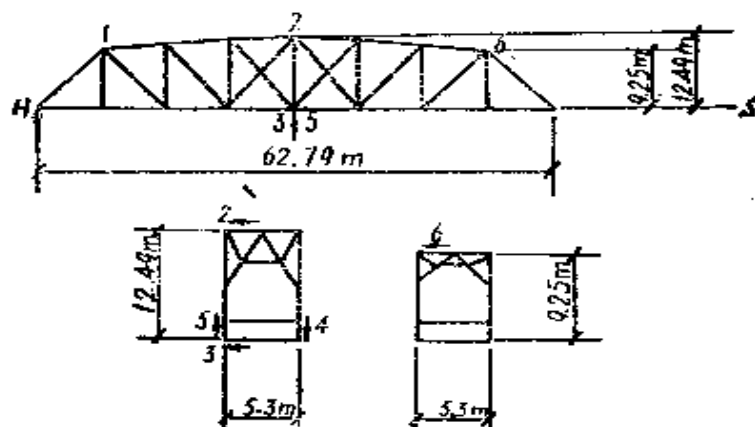


图 7—8 总体尺寸及 CZ-S<sub>2</sub> 布置图 (↑表示测试方向)

##### (二) 货物列车过桥实测资料分析

图 7—9 表示由蒸汽机车牵引货物列车过桥时, 桥梁下风架跨中横向振幅, 车速为 25.8km/h。从图中可见, 机车在桥上时桥梁横向最大振幅为 2.83mm, 货物列车在桥上为



1.18mm，当车体逐渐离桥时最大振幅为 1.67mm，三个区段由于引起桥梁横向振动的原因不同，因此振动的基本规律也不同，下面分段进行讨论。

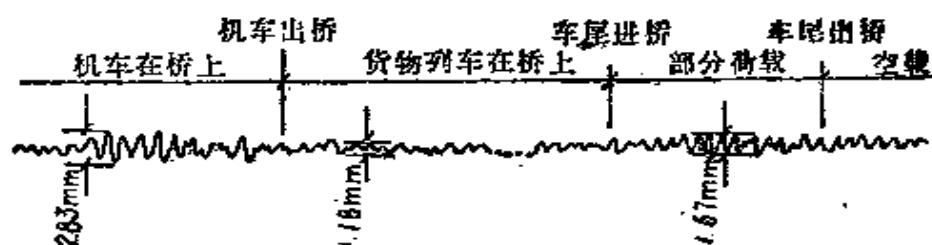


图 7—9 桥梁下弦跨中处横向振动 ( $v = 25.8 \text{ km/h}$ )

(1) 机车在桥上区段：蒸汽机车动轮偏心块引起锤击作用，左右偏心块相角差为  $90^\circ$ ，当偏心块的振动频率与桁梁桥的横向振动频率相接近时，引起比较大的横向振动。

图 7—9 中所示桁梁桥的横向振动第一自振频率为  $1.71 \text{ Hz}$  (实测成果)，蒸汽机车动轮直径  $1.5 \text{ m}$ ，因此引起横向共振的速度为： $v = \pi \times 1.5 \times 1.71 = 8.06 \text{ m/s} = 29 \text{ km/h}$ 。

实际上，由于机车质量参于桥梁的振动，因此共振速度比  $29 \text{ km/h}$  略低。图 7—9 中表示  $v = 25.8 \text{ km/h}$  时机车在桥上区段的振动。图 7—10a 中表示  $v = 30.6 \text{ km/h}$  时机车在桥上区段的振动。图中明显表示横向振动比较大，而作为对照的是，桥梁竖向振动的振幅并不大。

当速度进一步提高时，横向振动振幅减小，图 7—10b 中表示当列车速度为  $47.4 \text{ km/h}$  时，接近该桥竖向振动共振速度，这时桥梁竖向振动振幅较大，横向振动振幅较小。

图 7—11 中表示不同车速时，机车在桥上区段横向振幅最大值。从图中可见在共振速度附近的振幅比较大。

## (2) 货物列车过桥区段

图 7—12 表示当货物列车过桥时，车速和桥梁下弦跨中

最大横向振幅之间的关系。振幅随着车速增大而增加。

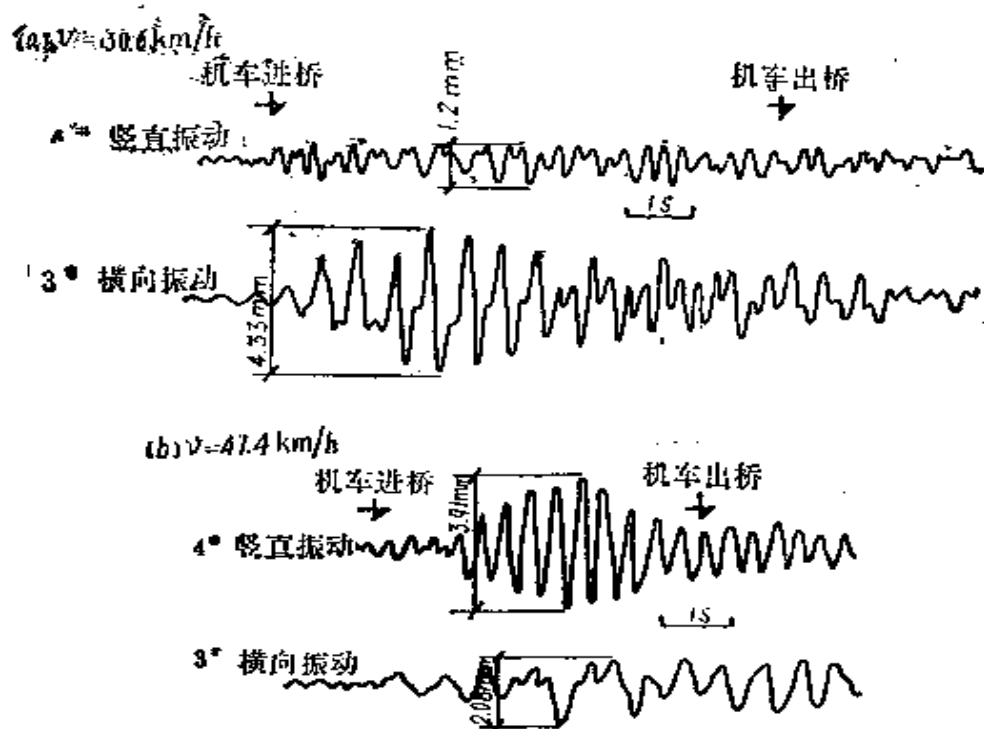


图 7—10 机车以不同速度通过时，桥梁的竖向及横向振动

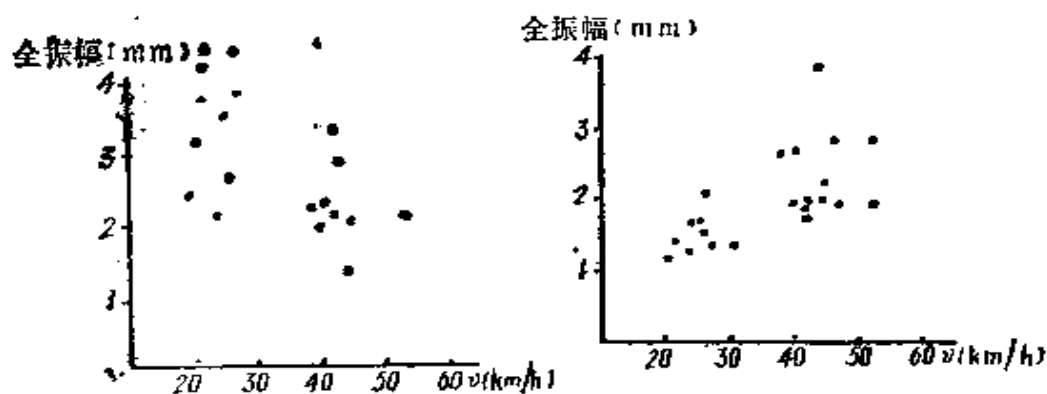


图 7—11 蒸汽机车过桥时，桥梁横向振幅与速度的关系

图 7—12 货物列车过桥时，桥梁横向振幅与速度的关系

从振幅值互相比较中可以看到，除了在共振速度（20～30 km/h）范围以外，一般货物列车引起的桥梁振幅与机车

引起的振幅值差不多，个别情况可能超过。

### (3) 列车离桥区段

当列车离桥时，桥上活载质量逐渐减少，这时桥梁结构的变形能量促使桥梁结构的振动加大（图7—13）。这个现象当车速高时比较明显，车速小时不明显或没有振动加大的趋势。

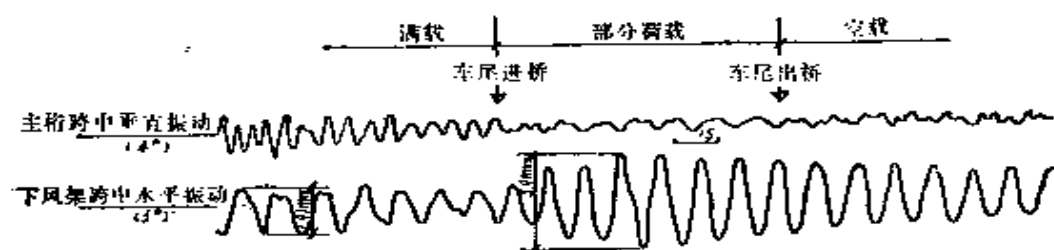


图7—13 列车离桥时的桥梁横向振幅图形 ( $v = 54.2 \text{ km/h}$ )

图7—9中表示当车速为 $25.8 \text{ km/h}$ 时的情况。图7—13中表示当车速为 $54.2 \text{ km/h}$ 时的情况，货物列车离桥时桥梁下风架跨中横向振幅自 $1.91 \text{ mm}$ 增大至 $3.91 \text{ mm}$ 。

### (三) 列车过桥桁架空间变形图式

桁梁桥是由上、下风架，主桁架及桥门架组成的空间杆件系统结构，当列车过桥时，各部分都要参与变形工作。通过1\*~6\*六只拾震器，基本上测得列车过桥时的桁梁空间振型，其基本规律如下：

(1) 1\*、2\*、3\*和6\*测点振动是同向的，即上、下风架向同一方向振动，整个桁架以横向位移为主，断面扭转振动为次。

图7—14中表示出最大横向振动瞬间的桁梁变形图式，在(b)中，表示出跨中横向切面的变形图式。

(2) 测点2大于测点3，表示上风架横向振幅比荷载弦下风架的横向振幅大。

(3) 列车过桥，桥门架顶的横向位移（1°和6°）并不小，一般和上风架跨中位移同向，因此在横向抗弯振动中，上风架的作用比下风架小很多，这一点在我国铁路桥梁设计规程中，关于上、下风架的风力分配比例中已有反映。

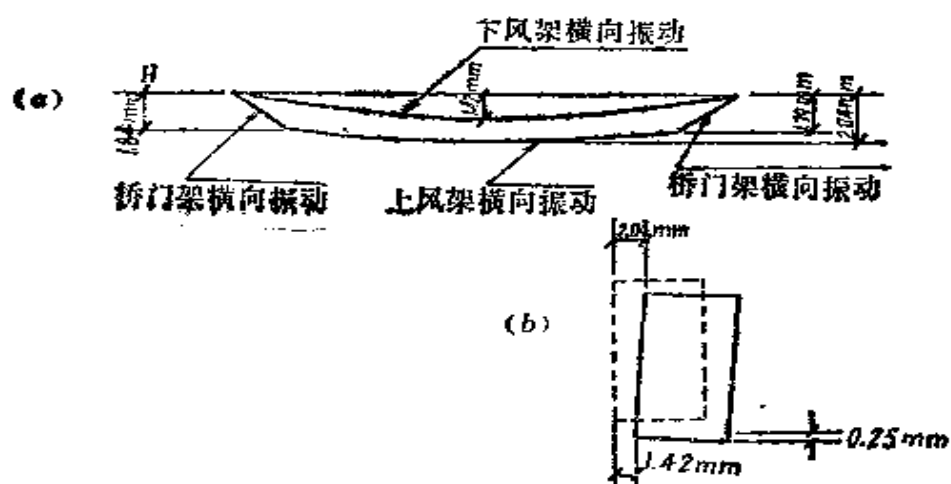


图 7—14 桁梁桥空间振动图式

## 第八章 桥梁振动测试

本章主要介绍桥梁振动测试的一般原理，铁路桥梁振动测试中常用的设备，测试方法以及试验资料的分析研究。

### 第一节 振动测试基本原理

众所周知，电测技术具有广泛的优越性，它灵敏度高，可以捕捉任何微小的讯号变化；量测过程能连续进行，自动记录；可以遥控，能适应各种场合的需要；与电子计算机连接使用，可实现测量——分析计算——打印输出全部测试过程的自动化。

在列车通过时，桥梁结构产生振动，所涉及到的主要参数是：结构的振动频率、振幅、阻尼特性以及荷载作用下结构的振动位移、速度、加速度等物理量。各振动参数之间有确定的微积分运算关系，即：

$$\text{加速度} \quad a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2},$$

$$\text{速度} \quad v = \frac{dy}{dt} = \int a dt,$$

$$\text{位移} \quad y = \int v dt = \iint a dt dt$$

因此，一般说来，只要得到其中一个参数与时间的关系曲线，就能表示出整个结构的振动过程。

如同结构的应变测试一样，振动测试中遇到的物理量也是非电量。为了用电测仪器去量测非电量，现代测振仪都具

有非电量转换成电量的装置——拾振器。通常，拾振器的输出信号十分微弱，为了能推动记录装置，将信号变化过程记录下来，必须经过电子放大器，将信号放大。因此，一套完整的测振设备必须包括如下三个部分：拾振器、放大器、记录器。图 8—1 表示测振仪器组成方框图。

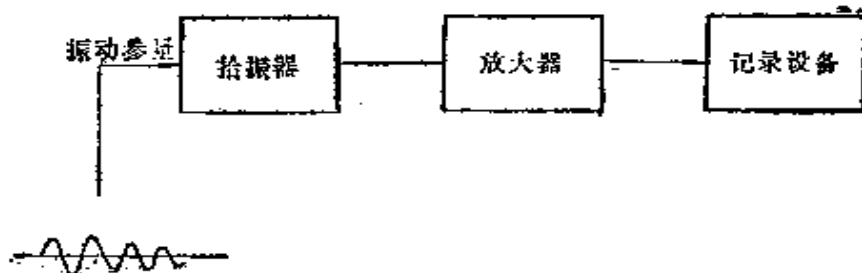


图 8—1 测振仪器组成方框图

### （一）拾振器

拾振器又称传感器或测振仪，其作用是把被测对象的振动讯号，转换成电信号传输出去。按其功能，拾振器可分为三个组成部分：即惯性系统、换能器和阻尼装置。惯性系统是利用惯性质量的相对变位来反应被测振动参数；换能器将此感受到的振动参数转换成电量形式传送过去；此外，为吸收拾振器的自振能量，改善仪器的幅频特性，仪器需要有适当的阻尼值，故拾振器内部还设置了专门的阻尼器。下面分述各部分的作用原理。

#### （1）惯性系统

测试桥梁振动时，很难在振动体附近找到不动点来安装仪器。因此，需要在仪器内部设置摆式惯性系统，利用质量  $m$  与机壳间相对位移进行测试，即所谓惯性式测振器。其力学原理如图 8—2，它包括一个质量为  $m$  的可动质量块，刚度系数为  $k$  的弹簧和表示阻尼系数为  $c$  的阻尼装置。此振动体系的动力平衡方程为：

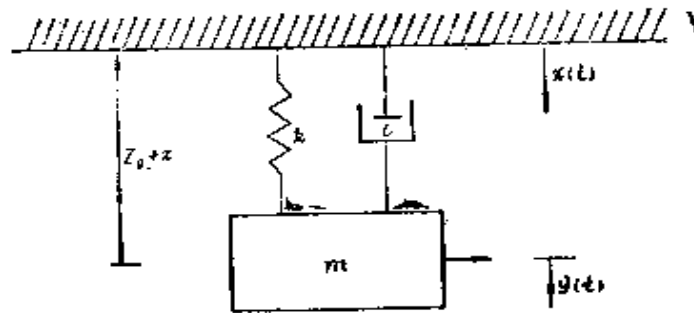


图 8—2 拾振器力学原理

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + c \frac{dz}{dt} + kz = 0 \quad (8-1)$$

式中

$z$  表示相对位移, 即所要研究的被测振动体的振动参数。

从图 8—2 中可知:

$$y = x + z, \quad \text{并令 } \sqrt{k/m} = \omega_0, \quad c/m = 2D\omega_0$$

则式 (8—1) 可写成:

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + 2D\omega_0 \frac{dz}{dt} + \omega_0^2 z = -\frac{d^2 x}{dt^2} \quad (8-2)$$

假定被测振动体的运动方程为:

$$x(t) = x_0 \sin \omega t \quad (8-3)$$

式中  $x$  —— 振动体对固定参考坐标的位移;

$x_0$  —— 被测振动的振幅;

$\omega$  —— 被测振动的频率。

由于拾振器外壳固定在振动体上, 与振动体一起振动,

故可将式 (8—3) 代入 (8—2) 中, 可得:

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + 2D\omega_0 \frac{dz}{dt} + \omega_0^2 z = \omega^2 x_0 \sin \omega t \quad (8-4)$$

这个微分方程的解由两部分组成, 其中方程的齐次解是一个随时间而衰减的自由振动, 由于阻尼的存在, 这个自由振动会很快地消失。另一部分是方程的特解, 是振动体的强

迫振动部分，也是我们主要关心的部分。方程的特解可以写成如下形式：

$$z = \hat{z}_0 \cdot \sin (\omega t - \varphi) \quad (8-5)$$

$$\hat{z}_0 = \frac{x_0 \mu^2}{\sqrt{(1-\mu^2)^2 + (2D\mu)^2}} \quad (8-6)$$

式 (8-5) 称为测振仪的动态响应方程式。

式中  $\mu = \omega / \omega_0$ ，称为频率比；

$D = c / 2 m \omega_0 = c / 2 \sqrt{m k}$ ，称为阻尼比；

$\varphi$ ——初相位角，并有

$$\operatorname{tg} \varphi = 2 D \mu / (1 - \mu^2)$$

比较式 (8-5) 与 (8-3) 可以看出，质量块  $m$  相对于仪器外壳的运动规律与振动体的运动规律是一样的，两者仅相差一个相位角  $\varphi$ 。此外，由于选取的频率比和阻尼比不同，测振仪器就具有能反应不同振动参数的性能。下面进一步说明测振仪分别反应位移、速度和加速度三种不同振动参数的情况。

#### (a) 测位移

当频率比  $\mu$  值很大，即结构的振动频率较拾振器自振频率高很多，并且拾振器的阻尼又比较小时，亦即  $\mu \gg 1$ ， $D < 1$  的情况下：分析式 (8-6) 有

$$\mu^2 / \sqrt{(1-\mu^2)^2 + (2D\mu)^2} \rightarrow 1$$

则式 (8-5) 可写成：

$$z = x_0 \cdot \sin (\omega t - \varphi) \quad (8-7)$$

显然，拾振器反应出的位移  $z$  与被测振动体的振幅（动位移） $x_0$  成正比，这时，仪器可用来测量位移，作为位移计使用。

$$\text{若令： } \beta = \frac{z_0}{x_0} = \mu^2 / \sqrt{(1-\mu^2)^2 + (2D\mu)^2}$$



则 $\beta$ 称为测位移时的幅频特性动力放大系数。如以不同的 $\beta$ 值为纵坐标,不同 $\mu$ 值为横坐标,根据不同的阻尼比 $D$ ,可以在双对数坐标轴上作出一系列的曲线,称之为幅频特性曲线。当满足 $\beta=1$ ,即拾振器作为位移计使用时,从曲线图上可以看到,此时幅频特性曲线趋于平直。我们说,位移计的使用范围,也就是特性曲线的平直部分。平直部分的频率下限因不同的阻尼比 $D$ 值而异,当 $D=0.6\sim 0.7$ 时,频率下限可达到 $\mu=\omega/\omega_0=2.5$ 左右。

### (b) 测加速度

当频率比 $\mu$ 较小,即被测频率较仪器的自振频率低很多,并且阻尼也足够小时,亦即 $\mu \ll 1$ ,  $D > 1$ 的情况下,分析式(8-6),有

$$1/\sqrt{(1-\mu^2)^2+(2D\mu)^2} \rightarrow 1$$

则式(8-5)可写成:

$$\begin{aligned} z &= \mu^2 x_0 \cdot \sin(\omega t - \varphi) \\ &= \frac{1}{\omega_0^2} \cdot \omega^2 x_0 \sin(\omega t - \varphi) \\ &= -\frac{1}{\omega_0^2} \ddot{x} \end{aligned} \quad (8-8)$$

上式表示拾振器反应的位移 $z$ 与被测振动体的振动加速度成正比,比例系数为 $1/\omega_0^2$ ,这时仪器可用来测量加速度,作为加速度计使用。比例系数 $1/\omega_0^2$ 表明仪器本身的自振频率愈高,其输出灵敏度愈低。

### 加速度计的幅频特性动力放大系数

$$\beta = 1/\sqrt{(1-\mu^2)^2+(2D\mu)^2}$$

同样,根据不同的 $\beta$ 值、 $\mu$ 值及 $D$ 值,在双对数坐标轴上可以绘制加速度计的幅频特性曲线。加速度计的使用频率范围也是曲线的平直部分。加速度计具有频率上限,当阻尼比 $D=0.6$

~0.7时,可使频率比达到 $\mu = \omega/\omega_0 = 0.65$ ,在此范围内,可以保证加速度计具有合理的精度。

### (c) 测速度

当被测频率接近于仪器的自振频率并且阻尼比又很大时,即 $\mu \rightarrow 1$ ,  $D \gg 1$ 的情况下:式(8—5)演变为:

$$\begin{aligned} z &= z_0 \cdot \sin(\omega t - \varphi) \\ &= x_0 \cdot \mu^2 \cdot \sin(\omega t - \varphi) / \sqrt{(1 - \mu^2)^2 + (2D\mu)^2} \\ &= \mu^2 x_0 \cdot \sin(\omega t - \varphi) / 2D\mu \\ &= \omega x_0 \cdot \sin(\omega t - \varphi) / 2D\omega_0 \\ &= \dot{x} / 2D\omega_0 \end{aligned} \quad (8-9)$$

上式表明,此时拾振器反应的位移 $z$ 与被测物体的振动速度成正比,仪器用来测量速度,作为速度计使用。可测频率范围,在仪器自振频率左右。拾振器反应速度时的动力放大系数为:

$$\beta = \mu / \sqrt{(1 - \mu^2)^2 + (2D\mu)^2}$$

通过以上的分析表明,只要根据被测对象的振动特征,正确选定测振仪器的性能参数,那么,这样的测振方法是可行的,并且在规定的范围内具有足够的精度。

### (2) 换能器

通过上述分析可知:已将被测对象的振动参数转换为质量块相对于仪器外壳的位移。换能器则进一步将质量块相对于仪器外壳的位移转换为电量形式。工程结构测试中,磁电式换能器的应用最广泛。图8—3表示磁电式换能器的工作原理。它是基于导线在磁场中运动,切割磁力线而产生感应电动势这一基本原理。根据磁感应定律,当线圈在磁场中运动时,线圈中感应电动势的大小,正比于线圈导线的长度 $l(\text{cm})$ 及线圈相对于磁钢的运动速度 $v(\text{cm/sec})$ 。即

$$E = B \cdot l \cdot v \times 10^{-8} \text{ (V)} \quad (8-10)$$

式中  $B$  为磁钢和线圈间的磁感应强度，单位为高斯。

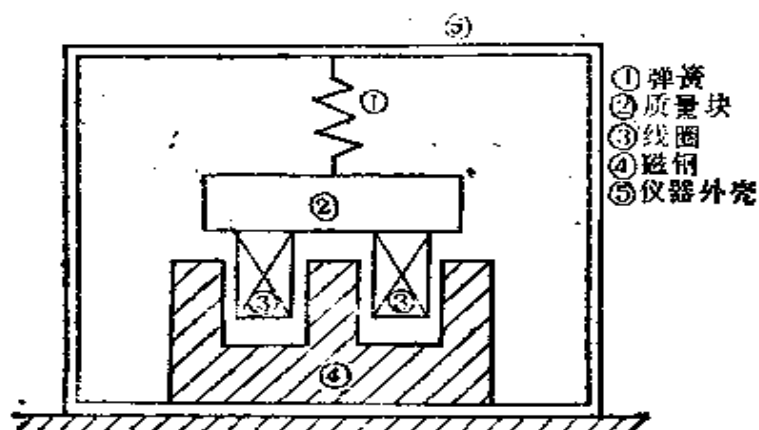


图 8—3 磁电式换能器换能原理图

由于感应电动势  $E$  与线圈对磁钢的相对运动速度  $v$  成正比，所以，若把磁钢和线圈分别固定在仪器外壳及惯性质量上，则线圈对磁钢的相对速度实质上就是反映了惯性质量块相对于仪器外壳的运动规律。

在以磁电式换能器构成的拾振器中，通常以单位速度产生的感应电动势值来表征该拾振器的灵敏度，如以  $S$  来表示，则拾振器的灵敏度可表示为：

$$S = dE/dv$$

式中  $S$  的单位是  $\text{mV}/\text{cm} \cdot \text{s}^{-1}$ 。

### (3) 阻尼装置

为了使拾振器能准确地反应振动参量，拾振器必须具有一定的阻尼。常用的阻尼器有液体的、气体的和电磁的三种形式。采用的方式与仪器的结构和形式有关。

液体阻尼常采用比较稳定的硅油做成活塞式阻尼器，此类阻尼器阻尼力大，但当温度变化较大时，阻尼系数也将随着变化。

气体阻尼常作成杯式空气阻尼器或活塞式空气阻尼器，

这类阻尼器的阻尼力受温度变化的影响较小，缺点是阻尼力不能始终很好地满足与运动速度成正比的假定。

电磁阻尼的原理是利用闭合的导线线圈在磁场内运动，线圈上感应出的涡流与磁场的相互作用力作为阻尼力。与液体的、气体的阻尼器相比较，电磁阻尼器的阻尼能较好地正比于振动系统的运动速度，受温度影响也比较小并且能方便地调节，所以电磁阻尼器得到广泛的应用，磁电式拾振器中，通常设置的都是电磁阻尼装置。

## （二）放大器

在测振系统中，放大器处于第二级的位置上，故又称其为二次仪表。它的功能为接受来自传感器的输出信号，经放大转为输给记录设备。放大器的输入特性必须满足传感器的输出要求，而输出特性又要符合记录设备的输入要求。根据放大器所处的位置 and 对其功能要求，放大器必须具有足够的灵敏度和放大能力，而且工作频带要宽，当多路测量时相位要一致，温度稳定性要好。

工程结构振动测试中，常用的放大器有两类，一类是输入信号的直接放大式，并具有微积分运算和滤波功能，如配磁电式拾振器使用的微积分放大器、配压电式加速度计使用的电压放大器和电荷放大器都为这一类；另一类是载波放大器，它把输入信号经过载波调制后再放大，经检波解调恢复原波形输出，这一类的如动态电阻应变仪、差动压放大器、鉴频放大器等，它们可配电阻式、电感式、电容式传感器使用。

下面介绍与磁电式拾振器配合使用的微积分放大器电路原理。典型的微积分放大器电路方框图如图 8—4，它由运算放大器、标定振荡器和直流稳压电源三部分组成。

运算及放大电路是微积分放大器的核心部分，放大器的

运算功能是依靠微积分电路实现的。由脉冲电路中知道，电容、电阻构成的简单  $RC$  电路就具有微积分功能。

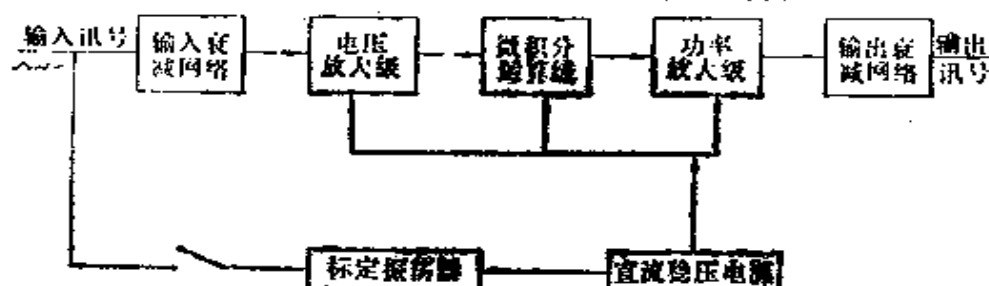


图 8—4 微积分放大器电路方框图

图 8—5 所示就是一个积分电路， $V_{in}$  表示输入电压， $V_{out}$  表示输出电压。适当选择  $R$  和  $C$  值，使时间常数  $RC \gg t_k$  ( $t_k$  为输入脉冲宽度)，即电容  $C$  上的充、放电过程变得很慢时，便有关系式：

$$V_{out} = \frac{1}{RC} \int V_{in} \cdot dt \quad (8-11)$$

上式 (8—11) 表明得到的输出电压等于输入电压的积分，电路具有积分的功能。

微分电路如图 8—6 所示，只要合理选择  $R$  和  $C$ ，当时间常数  $RC \ll t_k$  时，电容  $C$  上的充、放电过程很快完成，这时电路的输出电压等于输入电压的微分，即有式：

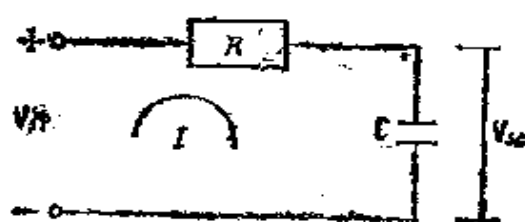


图 8—5 积分电路

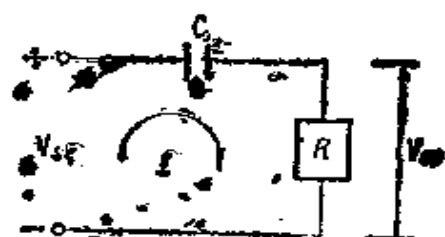


图 8—6 微分电路

$$V_{out} = RC dV_{in}/dt \quad (8-12)$$

上式表示电路具有微分功能。

测振放大器中因为有微积分电路，就能对拾振器传输过来的电讯号进行微积分运算，再加上输入、输出衰减器，电压放大和功率放大等网络，振动讯号就能推动记录设备工作，将被测对象的振动过程记录下来。

### (三) 记录设备

记录设备是测振系统中最后一道装置。记录设备按其记录方式可分为模拟记录和数字记录两种。光线示波器、电子示波器、 $x-y$ 函数记录器、模拟磁带记录仪等都为模拟记录器；如数字打印机、数字穿孔机、数字磁带记录仪等都为数字记录器。数字记录器易于与电子计算机连用，实现数据处理自动化，故正在日益广泛地发展着。目前国内工程结构测试中，用得最多的是模拟记录器，其中又以紫外光示波器使用最为普遍。本节仅以这类记录器为例来说明其作用原理。

简单说来，光线示波器是一种光学的、电磁的和机械的组合物，它利用高灵敏度的动圈式振动子作为测量参数的转换元件，将前级仪表输送过来的电信号转换为光信号在记录纸上成象。现代的光线示波器都具有灵敏度高、工作频带宽、体积小、能直接显示并可同时多点记录等优点。

图 8—7 表示光线示波器的主要组成部分。

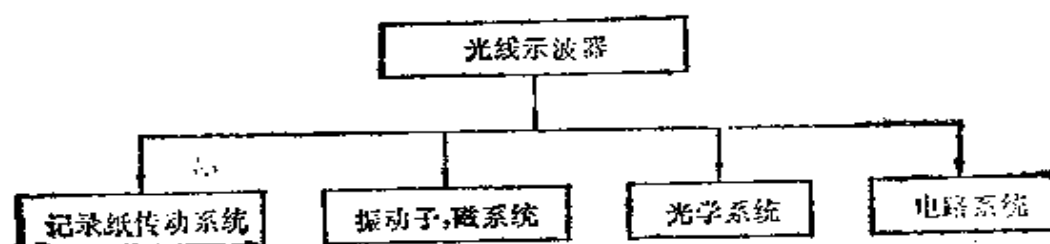


图 8—7 光线示波器组成示意图

#### (1) 振动子、磁系统

振动子是光线示波器的心脏。每台示波器都配有数种灵敏度和频率相应不同的一套振动子，可根据测量的要求选用。一个振动子对应一个测量点，记录一个信号。当把许多振动子一起插入示波器的公共磁系统内时，就可以满足多点测量、同时记录的要求。示波器的磁系统由高质量的永磁材料制成，磁系统内装有恒温装置（电阻丝加热器），使振动子的工作温度保持在 $45^{\circ} \pm 5^{\circ}\text{C}$ 的范围内，以使振动子的阻尼值保持恒定。振动子的阻尼分电磁阻尼和油阻尼两种，自振频率高而灵敏度低的振动子采用油阻尼；自振频率低而灵敏度高的振动子一般采用电磁阻尼。对于电磁阻尼振动子，要求测量电路的阻抗能使振动子达到最佳的阻尼度。

现代的光线示波器多数使用动圈式振动子。动圈式振动子实质上是一各磁电式电流计，其核心部分是一个“质量弹簧系统”，图8—8表示这种振动子的构造和工作原理。图中①是张丝，为产生反扭矩的弹性元件，并用来悬挂线圈④和小镜③（即为质量元件），张紧装置②用以调节张丝的松紧度，以使振动子具有不同的固有频率。当变化着的信号电流通过线圈时，在磁场作用下，线圈张丝轴转动，直到电磁力矩与张丝的弹性反力矩相等时，线圈才静止下来，张丝的扭转带动贴在其上的小镜跟着发生偏转，小镜偏转角度随着信号电流的变化而变化，在光源照射下，经过光学系

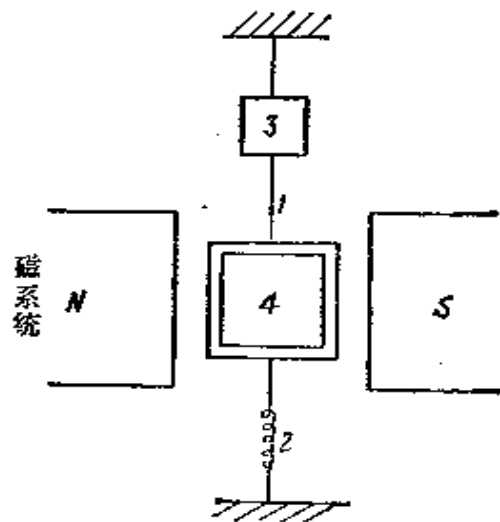


图8—8 动圈式振动子构造和工作原理示意图

统的反射和放大，镜片的角度变化转变成运动着的光点，当记录纸转动时，在记录纸上，记录下测试参数的变化过程。

振动子的主要技术参数有：固有频率、灵敏度、内阻和最大允许电流。选用振动子必须注意到这些技术指标。

## （2）光学系统

光线示波器的光路有三条：振动子光路、时标线光路和分格线光路。图 8—9 为这三条光路在记录纸上绘出的线条。振动子光路记录下的曲线，反映被测参量的变化过程，每一个振动子可以描绘出一条记录曲线，这是最主要的光路。时标线是垂直于记录带前进方向的横向直线，它给出不同频率的时间信号，反映记录速度及被测信号的变化与时间的关系，此线每隔一定时间（如 1 s、0.1 s 或 0.01 s）出现一次。分格线是平行于记录带运动方向的平行纵向直线，每隔 2 mm 产生一根细分格线，每 10 mm 产生一根粗分格线，以便于观察和阅读记录曲线。

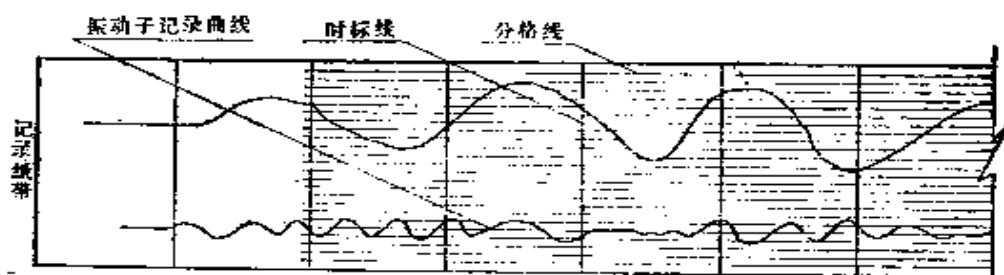


图 8—9 记录纸带上的线条示意图

图 8—10 说明了上述三条光路的形成过程，振动子光路和分格线光路的光能是由主光源 ZD1 提供的，其一，路经柱面透镜  $l_1$  聚焦，经平面镜  $M_1$  反射，使光线呈水平狭长光带照射在振动子  $G_1$  上，由于振动子内的小镜子反射和透镜聚焦，光线成为细长的光带，再经  $M_2$  的反射和  $l_2$  的聚焦，形成小光点投在记录纸上；另一路经柱面透镜  $l_3$  聚焦，经平面镜



$M_3$ 、 $M_4$ 的反射，透过分格线光栅D照射到记录纸上，形成分格线光路。时标线是由脉冲频闪灯ZD2提供光能的，经平面镜 $M_5$ 和 $M_2$ 的反射及透镜 $l_2$ 的聚焦，成为很细的光线照在记录纸上成象。紫外光示波器采用特种的对紫外线敏感而对其它波长的光线不敏感的记录纸带，经室内光或荧光灯感光，即自行显示记录曲线。

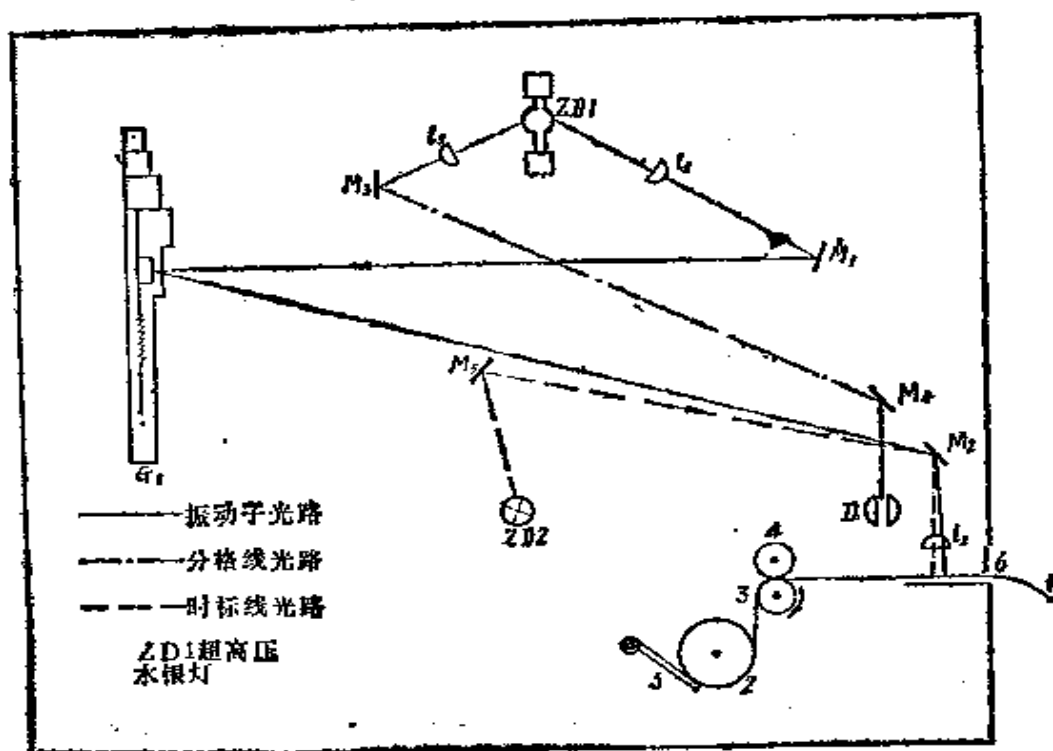


图 8-10 示波器光路和记录带传动机构

注：1. 记录带；2. 储存筒；3、4 橡皮滚筒；5. 弹性压板；  
 6. 观察窗；ZD1 超高压水银灯

### (3) 传动系统

传动系统是使记录带按不同的速度作定向匀速运动的机构。是以超高压水银灯作光源的示波器，记录带速度一般在  $5 \sim 2500 \text{ mm/s}$  之间。

传动系统由电动机、变速箱、记录带传动机构及一些控

制机构组成。交流供电的示波器，其电动机多采用单相同步电动机，特点是转速稳定，过渡过程时间短。变速箱主要有一系列的齿轮箱组成，通过操纵电磁弹簧离合器使齿轮系换挡，从而将电动机传动轴输入的转速经过变换后输出各种不同的速度。记录带传动机构示于图 8—10 中。记录带 1 卷在储存筒 2 上，弹性压板 5 起固定储存筒的作用。当需要拍摄记录时，记录带由橡皮滚筒 3 和 4 引出机外。橡皮滚筒 4 起压紧记录带的作用。滚筒 3 是主动滚筒，由它带动记录带运动。主动滚筒的动力来自变速箱的输出轴，是通过皮带来传动的。现代的示波器操作简便可靠，并可在运行中变速，使用时只要按下相应的速度按钮，便可以得到各种不同的记录速度。

#### (4) 电路系统

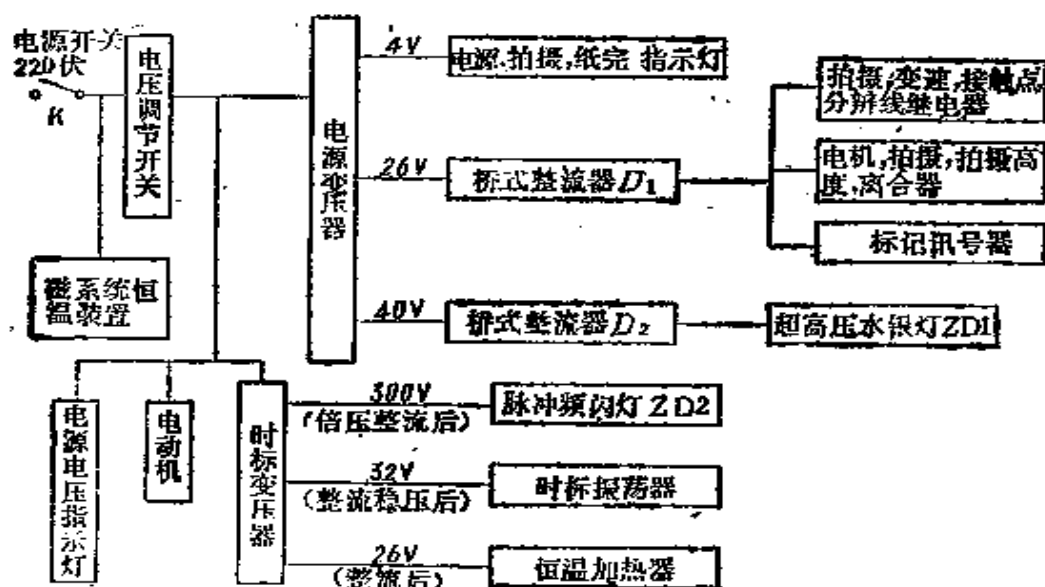


图 8—11 示波器电路系统方框图

电路系统是起供电及控制作用。主要由光源灯、指示灯、变压器、继电器、加热器等部分组成。图 8—11 是示波

器电路系统方框图，电能供应部分对电动机，主光源、时标光源、指示灯及恒温装置部分供电，依靠一系列电磁的和机械的部件，通过操纵开关按钮，来达到控制示波器运转、停止、变速、拍摄记录等目的。

## 第二节 振动测试方法

### （一）仪器的选择和配套

如前所述，一个完整的测试系统应当包括拾振器、放大器和记录器三部分，由于结构形式的不同，每一种仪器又都有它一定的测试范围和分辨能力。为了正确地进行测试工作，首先应根据被测对象的振动规律及其参量变化范围，正确选择与之相适应的仪器，才能确保测试结果的正确性；其次是仪器的合理配套，即拾振器与放大器之间、放大器与记录器之间阻抗必须匹配，才能使仪器正常工作并充分发挥它的性能，也才能使整个测振系统获得最宽的工作频带和在信号波形不失真情况下的功率输出最大。

常用的工程振动测试仪器有：磁电式测振系统、应变式测振系统和压电式测振系统。

磁电式测振系统配合方框图如图 8—12 所示，这类仪器多数用来测量位移，也可以测量速度和加速度参数。其特点是输出讯号大，阻抗在几千欧左右，长导线影响较小，抗干扰性能较好。

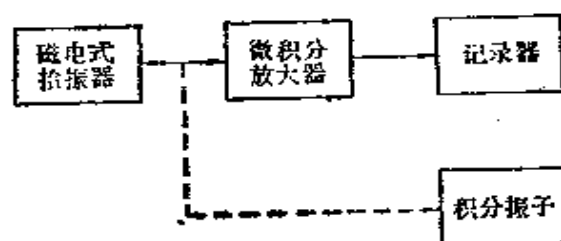


图 8—12 磁电式测振系统配套方式

图 8—13 是压电式测振系统配套方式，这类仪器多数用来测量加速度。由于拾振器输出阻抗很高，故导线和接线件

对阻抗影响较大，要求绝缘性能好。仪器自振频率高，可测频响宽，输出讯号也较大。但抗干扰性能较差，易受电磁场干扰。

应变式测振系统方框图如图 8—14，这类仪器低频响应好（能从零赫芝开始），阻抗较低，易受干扰，长导线测量时会使灵敏度降低。

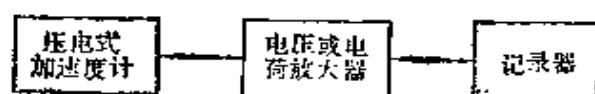


图 8—13 压电式测振系统配套方式

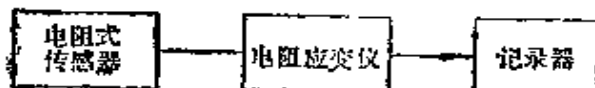


图 8—14 应变式测振系统配套方式

桥梁的振动频率较低，现场测试时，受环境条件影响较大，又往往使用长导线连接，所以要求测试桥梁振动的仪器低频响应好，抗干扰性能强，工作稳定可靠。目前国内铁路桥梁使用的测振仪主要有701型及CZ型两种，均有专用的放大器配套，两种型号的仪器工作原理相同，都属于磁电式测振系统，特别是CZ型测振仪，可测频率范围在0.5~30Hz，低频响应较好，灵敏度较高，每一台测振仪能够垂直向、水平向两用。安装、调试方便，工作较稳定，能够满足桥梁振动的测试要求。

## （二）仪器的安装和调试

本节以CZ型桥梁测试仪为例，说明仪器的安装、调试方法。CZ型测振仪由CZ-S型拾振器及CZ-F型放大器组成，通常配以紫外光示波器（SC-16型光线示波器）作为记录设备。

CZ-S型拾振器按其铰接方式的不同，分为CZ-S<sub>1</sub>型（十字簧片铰接）和CZ-S<sub>2</sub>型（轴承及u型簧片铰接）两种。仪器主要有复摆系统和电讯号换能器两大部分。复摆系统由摆与支架铰接，通过螺旋弹簧组成一个惯性弹性系统。换能器

有磁电式和电感式两种。分别装在复摆的两端，所以每台仪器可以同时分别输出感应电压和差动电感变压讯号。摆的运动量与振动体振幅成正比(位移型摆)，当使用磁电式换能器时，拾振器的输出量与输入振动速度成正比，配合 CZ-F 型放大器，经换算后可测量位移，也可测速度或加速度参量；如果使用电感式换能器，拾振器输出的差动电压与外界振动位移成正比，这时与动态电阻应变仪或差动变压放大器配套，可以测得位移参量。每台仪器可以垂直向或水平向使用，故在仪器外壳两个方向分别设有三只底脚螺栓用来与被测物体相连。安装时首先应使拾振器的感振方向与待测方向一致，使得摆的运动方向与欲测结构物的振动方向一致；其次，应使拾振器与被测振动体固定良好，要保证振动过程中两者接触紧密、不能有松动。CZ型拾振器自重约4kg，当被测结构物振动较小时，依靠底脚螺栓连接，能够保证振动过程中良好的接触，如果振动体振动加速度大于重力加速度时，对拾振器的固定应考虑采取其它措施。

调试拾振器时，首先松开仪器两端的锁定螺钉，使摆能自由摆动。测试水平向振动时，有机玻璃盖板朝水平方向安装，并使弹簧挂钩与吊环脱开，调节底脚螺钉，使线圈刻度板指针指向“0”位刻度线处，则水平向设置拾振器调试完毕。测试垂直向振动时，有机玻璃盖板面应朝上安装，使用调节弹簧的扳手拧动调零螺杆，使弹簧吊环挂在吊钩板上，并调整到刻度板指针指向“0”刻度线处，则垂直向安装拾振器调试完毕。不论水平向或垂直向安装，都应将底脚螺栓的锁紧螺母紧固，以防发生寄生振动。最后，根据配套放大器，在拾振器的电动输出端或电感输出端接上连接线，并将拾振器面板上的波段开关旋拧至相应档位，仪器处于工作状态。

CZ-F 型放大器是直接耦合式微积分运算放大器，装有六个放大槽路，可同时与六个拾振器相连，测量六个测点。仪器可分别进行一次积分、一次微分和线性放大三种运算，只要拧动“测量选择”开关，便可选择所需要测量的振动参量。根据被测对象的振动幅度和示波器上振子灵敏度的大小，置“输入衰减”和“输出电阻”于合适的档位上，将各通道调至零完毕后，把放大器与拾振器及记录器连接起来，放大器进入工作状态。

当采用紫外光示波器作为测振记录设备时，安置示波器时，应避开阳光直接照射的地点，同时与放大器一样，也不应将示波器放置于振动很大的场所，记录纸的安装应在尽可能暗的光线下进行。选择振动子应根据其技术参数，首先是对其固有频率的选择，灵敏度的选择处于从属地位。振子固有频率低，则灵敏度高，但工作频率范围窄，反之亦然。在桥梁测试中，测应变一般都使用自振频率在 $400\sim 2500\text{Hz}$ 的振子；测振动多数使用低于频率 $400\text{Hz}$ 的振子。由于低于 $400\text{Hz}$ 频率的振子采用电磁阻尼，其最大允许电流也较小，为使振动子的阻尼达到规定值（一般为 $0.6\sim 0.7$ ），又要使放大器输送过来的信号电流不超过振子的允许电流，故需要在振动子与放大器之间同时接入串联和并联阻尼电阻，电阻分流箱便是这样的装置。固有频率高于 $400\text{Hz}$ 的振子多采用油质阻尼，外电路电阻对振子阻尼影响较小，但要注意振动子的内阻必须和放大器的输出阻抗相匹配；也要使振动子接受的电流不超过其允许的范围。如不满足时，也要接入附加电阻箱。使用振动子必须满足上述条件，方能保证测量精度。安装振动子，应使振动的顺序与振动子投射在记录纸上光点的位置相一致，以减小记录误差；同时，振动子光点的大小和亮度也应调试到最佳状态。此时按动被测讯号，全套

设备便可开始测试工作。

在仪器的安装过程中，还要注意，仪器之间的连接导线，仪器上的连接件都要保证连接可靠，接触良好，插头和插座清洁、干燥，对拾振器更要注意防水和防潮。同时，良好的接地也必不可少。只有这样才能保证测量的精度和测试的顺利进行。

### （三）仪器的标定

如同其他测试仪器一样，测振仪器本身的一些性能指标，如可测频率的范围、阻尼常数、量测精度等会随着时间的变化而变化；另外，振动测试中总要将拾振器、放大器和记录器配套使用，这时整个系统的灵敏度和使用范围等项指标需要确定。所以在正式使用仪器之前，必须对仪器进行标定。

测振仪器的标定可分两种形式：一种是对拾振器、放大器和记录器分段标定，分别测定各段的灵敏度或其它工作常数，称为分部标定；另一种是对拾振器、放大器和记录器全系统配套标定，得到最初输入量与最终输出量的关系，称为系统标定。实际工作中用得最多的是系统标定。

系统标定通常在标准振动台上进行。常用的振动台有电磁式和机械式两种，作为标定用的振动台必须：振动稳定，激振力大，波形失真小，振动范围宽，并能方便地调节其振幅和频率值。图 8—15 是振动台标定方框图。

首先将拾振器固定在振动台上，记录下仪器编号，通道，振动机号，振动机穴位号及各旋钮开关的档位，然后以振动台的振动为输入讯号，改变振动幅度和频率，记录下标定波形，再对所记录的波形进行整理、计算，便可得到整个测试系统的各项性能指标。

标定内容如下：

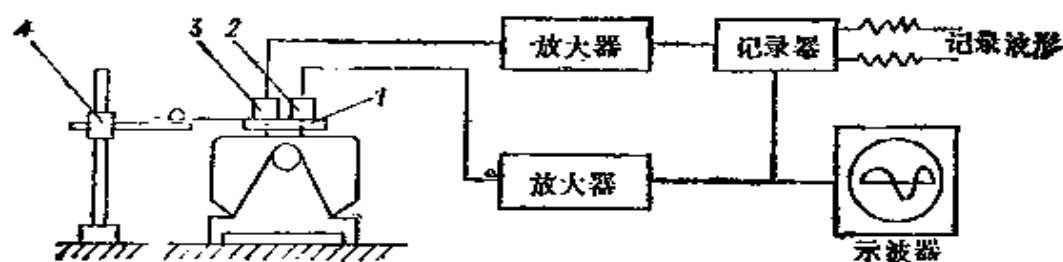


图 8—15 振动台标定方框图

注：1. 振动台；2. 标准测振系统传感器；3. 被测振动系统传感器；  
4. 读数千分表架。

### (1) 灵敏度标定

仪器的系统灵敏度是指最终输出讯号与相应的最初输入讯号之比，也就是用示波器记录下的波形幅值（一般用波形的峰值）除以输入传感器的振动台参量幅值如：

$$\text{位移计的灵敏度 } S_d = \frac{A}{d} (\text{mm/mm}) \quad (8-13)$$

$$\text{速度计的灵敏度 } S_v = \frac{A}{v} (\text{mm/cm} \cdot \text{s}^{-1}), \quad (8-14)$$

$$\text{加速度计的灵敏度 } S_a = \frac{A}{a} (\text{mm/cm} \cdot \text{s}^{-2}) \quad (8-15)$$

式中  $A$ ：示波器标定记录波形峰值，单位为mm；

$d$ 、 $v$ 、 $a$  分别为输入的位移 (mm)、速度 (cm/s) 和加速度 ( $\text{cm/s}^2$ )。

显然，上述标定得到的灵敏度会随着标定时振动台频率的改变而不同，所需要的仪器灵敏度，应该是在传感器频响曲线平台范围标定时振动台频率的数值，通常标定三次以上，再取其平均值。

### (2) 频率响应标定

频响标定用以确定仪器的使用频率范围，经常用到的是幅频特性标定，标定仪器灵敏度是随频率的变化情况而定。标定时，先固定一个输入振动幅度，然后从低到高改变振动



台的振动频率，这样可以得到在一定振幅下，随着振动频率改变而变化的一套振动波形。与计算灵敏度一样，将波形幅值除以标定的输入量，

即得到不同频率时的灵敏度值，再以灵敏度为纵坐标，标定频率为横坐标，在对数坐标上便可点出幅频响应曲线。

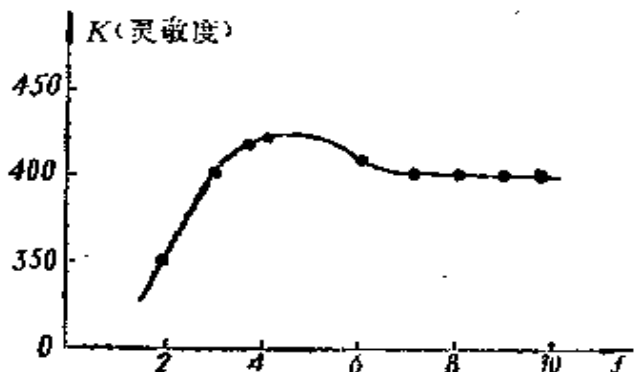


图 8—16 幅频响应曲线示意图

图 8—16 是幅频响应曲线的示意图，在曲线平坦区域内的频率范围，即是该测试系统最好的使用频率范围。

### (3) 线性度标定

线性度标定是检验仪器在固定频率情况下，其输出量是否与振幅成正比，以确定仪器的动态幅值工作范围。作法是

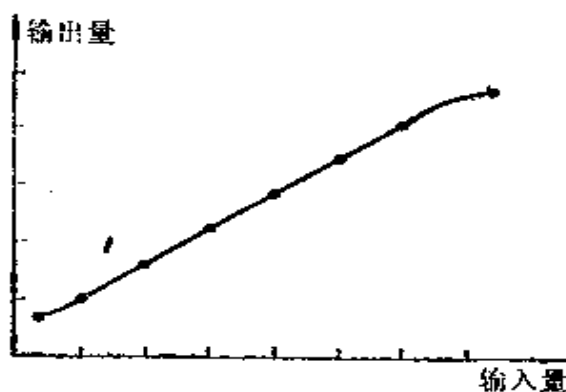


图 8—17 线性度曲线

先固定一个频率（选在幅频曲线平台内），然后由小到大改变振动台振幅，记录下一套波形。以波幅（输出量）为纵坐标，台幅（输入量）为横坐标，按同一比例在方格纸上作图，即得某一频率时的线性

度曲线，如图 8—17 所示。假如曲线是一条直线，则表明仪器的线性度是理想的。非线性情况通常出现在幅值很大和很小的时候。

以上是测振仪器的基本标定内容，标定时选取的幅值和

频率范围还应根据被测对象来确定。同时，标定时的仪器配套条件应和正式测试时完全一致。

#### (四) 试验的进行

桥梁振动测试，应按预先制定的程序进行。为此，首先必须编制试验方案。试验方案通常包括如下内容：

(1) 指出试验目的，确定试验性质，选定试验对象及需要使用的仪器设备。

(2) 根据试验的目的和要求，在熟悉了解试验对象的有关图纸资料及对试验过程的理论分析的基础上，确定测试项目、数量、设计测点位置，每一测点均应编号，测点布置应绘成图表。

(3) 绘制测量系统工作方框图。按照系统标定时配套条件，将测点编号、拾振器编号、放大器槽路号、振动子号、示波器穴位号、连接导线号及各旋钮开关档位位置，一一对应，列成表格。便于仪器安装及测试过程中参照查阅。

(4) 制定试验日程，明确人员分工，确定试验过程中通讯联络的方法及有关安全措施及保证测试能正常进行的其它有关事项。

在进行正式的测试之前，还应按照试验方案进行大量的准备工作，然后将仪器安装就位，调试准确。使全套设备及有关人员进入正式的测试工作状态。

测试过程中，应有统一的指挥，每次测试都应编号。并在记录纸上记上各光点所代表的测点号。随时观察被测讯号的频率及幅度变化情况，选择适当的记录速度，并根据讯号大小及速度快慢调节光点光栅亮度，以求最好的记录效果。

另外，在分析振动测试资料中，荷载的运行速度及行进位置是必不可少的，所以，测振过程中还必须有记录荷载位置的设备。最简单的记时工具是秒表，只要在试验地段设立

两个明显标志，测出列车通过两标志间的时间，便可以求得列车的运行速度。也可安装自动计时仪，利用列车车轮触发信号，自动控制电秒表计时。记录列车行进位置的办法一般是在桥上选定一个特殊部位，安装接收器。最方便的接收器是磁电头，使用时，只要将磁电头的输出线直接接到振子上，利用车轮的感应电流推动振子线圈偏转，便可在记录纸上记录出列车的所有轮位符号。

### 第三节 试验资料的分析计算

试验资料的分析计算应在测试工作结束后尽快进行。对其中一些控制性测点的仪器读数，则应在测试进行过程中随时分析，以便及时发现和纠正测试中可能存在的问题。

由于测振系统中记录设备（如光线示波器）记录下的曲线是模拟记录，作为分析计算的第一步，首先要对记录曲线进行整理，依据标定值将其转化为数字的形式。对原始资料的整理，一方面要尊重客观实际，做到尽量不遗漏点滴有用的资料；同时又应力求做到去伪存真，去粗取精，不被某些可能发生的错误或伪象所迷惑。

#### （一）结构的振动频率

在示波图上都有时标线记录，测试波形如果是周期性变化的，则只要将记录曲线与时标线比较，便很容易得到振动频率。另外，利用测振时的记时符号与记录曲线比较，如图8—18，则可按下式计算振动频率：

$$f = \frac{l}{t} \cdot \frac{N}{S} (1/s) \quad (8-16)$$

式中  $t$  ——时间符号的时间间隔 (s)；  
 $l$  ——两时间符号间的距离 (mm)；  
 $N$  ——波形数；

$s$  ——  $N$  个波的长度 (mm)。

如所选取的波形是列车在桥上时的记录, 则所得振动频率为结构强迫振动频率; 如果所取波形是列车出桥后记录下的, 所得频率是结构的自振频率。

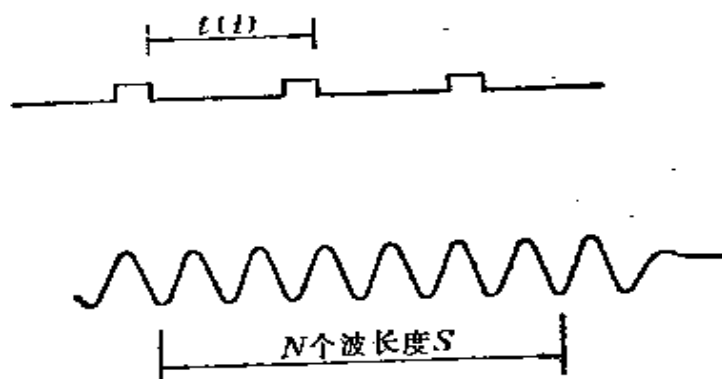


图 8—18 频率计算示意图

## (二) 阻尼特性系数

列车出桥后结构的自由衰减振动图形如图 8—19, 只要在波形上计算出振幅  $y_n$ 、 $y_{n+1}$  和  $y_{n+m}$ , 周期  $T$  ( $=2\pi/\omega$ ), 便可按下式计算阻尼特性系数:

$$\omega_d = \frac{1}{mT} \lg_e \frac{y_n}{y_{n+m}} \quad (8-17)$$

式中  $m$  —— 振幅  $y_n$  到  $y_{n+m}$  之间的波形数;

$T$  —— 周期, 波形振动一周所需的时间 (s)。

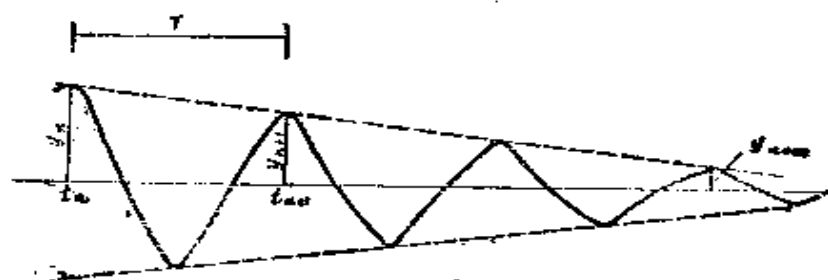


图 8—19 有阻尼自由衰减振动图形

为了提高 $\omega_0$ 值的计算精度， $m$ 取值应适当大些。

### (三) 振幅

分析振动波形应计算出每一测点在荷载通过时的最大振幅值（并指出此时的列车轮位位置），方法是先求得最大振幅处的振动频率，再根据此频率找出系统标定时仪器放大倍数（即系统灵敏度 $S$ ），则测点最大振幅值：

$$H = \frac{A}{S}; \quad (\text{mm}) \quad (8-18)$$

式中  $S$ ——测振系统标定灵敏度（见公式（8—13）～（8—15））；

$A$ ——实测波形最大峰值（mm）。

### (四) 振动加速度

加速度是一个很重要的指标，它表示列车运行的安全程度和司机、旅客的舒适度，CZ型测振仪器可直接测得振动加速度。也可根据测得的强迫振动频率和振幅来计算加速度：

$$a = 4\pi^2 f^2 \cdot A (\text{cm/s}^2) \quad (8-19)$$

式中  $f$ ——强迫振动频率（次/s）；

$A$ ——振幅（cm）。

### (五) 动力系数的确定

一般列车过桥，桥梁结构的振动是属于随机振动，由于理论分析上的困难，特别是实测资料（有关激振源的概率特性）的不足，目前还是采用比较简单的定值论方法，用包络线方法求最大动力系数值。

按实测资料，动力系数可由下式来定出：

$$1 + u = 1 + \frac{a_{\max}}{a_{0\max}}$$

式中  $a_{0\max}$ ——表示静活载过桥时，测点最大挠度（或应力）值；

$a_{\max}$ ——表示列车以一定速度  $v$  过桥时，测点最大挠度（或应力）值。

通常  $a_{0\max}$  可由列车爬行（5 ~ 10 km/h）过桥时的测点值作为静活载过桥时的测点值。

## 附录1 单轮过桥计算程序

```

EXTERNAL FCT
DIMENSION Y(3), K(3), Q(3)
REAL K,L
LOGICAL BE
COMMON C1, C2, C3
READ *,WB,W,W1,R,G,V,L,P
WRITE(<*,250> WB,W,W1,R,G,V,L,P
250  FORMAT<1X,3H WB=,F14.6,/,1X,2HW=,
,F14.6,/,1X,3H W1=,F14.6,/,1X,2HR=,
* F14.6,/,1X,2HG=,F14.6,/,1X,2HV=,F14.6,/,1X,
2HL=,F14.6,/,1X,2HP=,F14.6>
Y<1>=0
Y<2>=0
Y<3>=0
H1=L/V*P
H=H1/20
T=0
H2=0
NO=0
WRITE(<*,300>
300  FORMAT<1X,2H NO,9X,1HT,9X,1HX,9X,2HYD,
* 11X,2HYA,11X,3HYDS,10X,3HYAS>
350  E=1+R*SIN(W*T)**2
C1=-2.*WB/E
C2=-W1**2/E
C3=R*G*SIN<W*T>/E
BE=.TRUE.

```

```

CALL GILL(3,H,BE,Y,K,Q)
IF(V * T.GE.L)GO TO 500
X = V * T
YD = Y(2)
YA = K(3)
YDS = YD * SIN(3.1415926 * X/L)
YAS = YA * SIN(3.1415926 * X/L)
T = T + H
H2 = H2 + H
IF(H2.LE.H1)GO TO 350
T1 = T - H
WRITE(*,400)NO,T1,X,YD,YA,YDS,YAS
400  FORMAT(1X,15,3X,F7.4,3X,F7.3,3X,4(F10.6,
3X))
H2 = H
NO = NO + 1
GO TO 350
500  STOP
END
SUBROUTINE GILL(N,H,BE,Y,K,Q)
LOGICAL BE
DIMENSION Y(N),K(N),Q(N),A(4),B(4),C(4)
REAL K
DO 20 I = 1,N
Q(I) = 0
A(1) = 0.5
A(2) = 1 - SQRT(0.5)
A(3) = 1 + SQRT(0.5)
A(4) = 1/6
B(1) = 2
B(2) = 1

```



```

      B(3) = 1
      B(4) = 2
      C(1) = 0.5
      C(2) = 1 - SQRT(0.5)
      C(3) = 1 + SQRT(0.5)
      C(4) = 0.5
      BE = .FALSE.
20    CONTINUE
      DO 60 J = 1, 4
      CALL FCT(Y, K)
      AJ = A(J)
      BJ = B(J)
      CJ = C(J)
      DO 100 I = 1, N
      D = AJ * (K(I) - BJ * Q(I))
      Y(I) = Y(I) + H * D
      Q(I) = Q(I) + 3 * D - CJ * K(I)
100   CONTINUE
60    CONTINUE
      RETURN
      END
      SUBROUTINE FCT(Y, K)
      DIMENSION Y(3), K(3)
      REAL K
      COMMON C1, C2, C3
      K(1) = 1
      K(2) = Y(3)
      K(3) = C1 * Y(3) + C2 * Y(2) + C3
      RETURN
      END

```

## 附录2 确定桥上车轮号码程序

```
SUBROUTINE NM(N,A,M,NN,V,T,L)
DIMENSION A(N)
REAL L
M=1
NN=0
DO 100 I=1,N
IF((V+T-A(I)).GE.L)GOTO 70
IF((V+T-A(I)).LT.O)GOTO 80
NN=NN+1
GOTO 100
70 M=I+1
100 CONTINUE
80 RETURN
END
```

## 参 考 文 献

- (1) Bhatti M.H.  
Vertical and Lateral Dynamic Response of Railway Bridges due to Nonlinear Vehicles and Track Irregularities  
Submitted in partial fulfillment of the requirement for the degree of Doctor of Philosophy in C.E. in the IIT 1982.12
- (2) Chu K.H.  
Railway Bridge Impact, Simplified Train and Bridge Model Proceeding ASCE 1979 ST9 Sep.
- (3) Chu K.H. and Wiriyachai A.  
Bridge Impact due to Wheel and Track Irregularities  
Journal of the Engineering Mechanics Division ASCE Vol.108 1982 Aug.
- (4) Corbin J.C. and Kaufman W.M.  
Classifying Track by Power Spectral Density  
Mechanics of Transportation Suspension Systems Vol.15 ASME 1975 Dec.
- (5) Corbin J.C.  
Statistical Representation of Track Geometry  
Report No.FRA/ORD-80/22, National Technical Information Service Springfield  
1980 March
- (6) Averill M.Law and W.David Keltion  
Simulation Modeling and Analysis 1982.

- (7) Ottes R.K. and Enochson, L.  
Digital Time Series Analysis 1972.
- (8) И.И.Казен  
Динамический расчет пролетных строений же-  
лезнопорожных мостов 1969
- (9) 松浦章夫  
高速鉄道における車両と橋桁の動的相互作用  
鉄道技术研究資料 1974.5.
- (10) 伊藤学、片山恒雄  
橋梁構造の振動減衰  
土木学会論文報告集 1965.5.
- (11) 松浦章夫  
高速鉄道における橋桁動的の動に関する研究  
土木学会論文報告集 1976.12.
- (12) 王福天主編 《車輛动力学》  
中国铁道出版社 1981.
- (13) 曹雪琴、吳鵬賢 “桁梁桥横向振动概率分析法”  
《桥梁建设》 1983.第8期。
- (14) 《铁路桥梁检定规范》(及说明)  
中华人民共和国铁道部 1978.
- (15) 应怀樵《振动测试和分析》  
中国铁道出版社 1979.11.
- (16) 《铁路桥梁检定结构试验手册》 铁路桥梁检定结构试验手  
册编写组  
中国铁道出版社 1981.3.
- (17) 国际铁路联盟规范(有关桥梁部分)  
大桥局桥研所 1981.10.
- (18) 《苏联铁路、公路及城市桥涵设计规程》(CH200-62).

