

第2章 几何组成分析

教学提示：本章研究的主要内容是体系的几何方面的问题。杆件体系是由若干杆件及地基用链杆、铰或刚结点连接而成的。本章对平面杆系的几何组成进行分析，以解决怎样组成的杆系才能承受荷载这个基本问题。同时，由于结构的组成方式不同将影响其力学性能和分析方法，因此，在分析结构受力、变形之前，也必须首先了解结构的组成。

教学要求：本章让学生了解几何组成分析的目的，重点掌握以下基本概念：几何不变体、几何可变体、自由度、约束、瞬铰、必要约束、多余约束、静定结构和超静定结构；理解几何不变无多余约束的平面杆件体系的基本组成规律。并能够熟练地运用组成规律分析各种复杂的杆件体系。

2.1 概述与名词解释

实际工程结构中，杆件结构一般是由若干根杆件通过结点间的连接及与支座的连接组成的。结构是用来承受荷载的，首先必须保证结构的几何构造是合理的，即它本身应该是稳固的，可以保持几何形状的稳定。一个几何不稳固的结构是不能承受荷载的。例如图 2.1(a) 所示结构由于内部的组成不健全，尽管只受到很小的扰动，结构也会引起很大的形状改变。

对结构的几何组成教学分析称为几何组成分析。其目的在于：判断结构有无保持自身形状和位置的能力；研究几何不变体系的组成规律；为区分静定结构和超静定结构及进行结构内力分析打下必要的基础。

在对结构进行几何组成分析之前，先介绍几个名词。

1. 几何不变体系和几何可变体系

杆件结构在不计材料应变的条件下，杆系的形状和位置保持不变，称为几何不变体系(图 2.1(a))。反之，称为几何可变体系(图 2.1(b))。

显然只有几何不变体系可作为结构，而几何可变体系是不可以作为结构的。因此在选择或组成一个结构时必须掌握几何不变体系的组成规律。

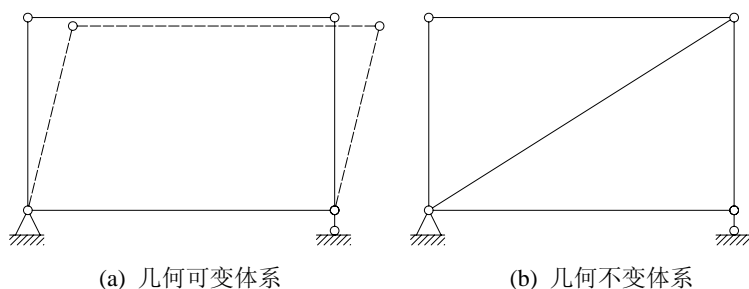


图 2.1

2. 自由度 S

判断一个体系是否可变, 涉及到体系运动的自由度问题。物体或体系运动时, 彼此可以独立改变的几何参数的个数, 称为该物体或体系的自由度。换句话说, 一个物体或体系的自由度就是它运动时可以独立改变的坐标个数。

(1) 点的自由度。

点在平面内的自由度为 $S=2$: (x, y) , 图 2.2 为点的自由度。

(2) 刚片的自由度。

所谓刚片, 就是几何形状不变的部分。由于我们在讨论体系的几何构造时是不考虑材料变形, 因此可以把一根梁、一根柱、一根链杆甚至体系中已被确定为几何不变的部分看作是一个刚片, 图 2.3 所示为一平面内刚片。

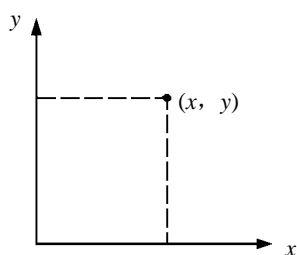


图 2.2 平面内点的自由度

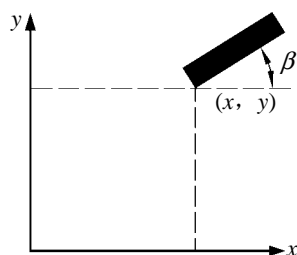


图 2.3 平面内刚片的自由度

刚片在平面内的自由度为 $S=3$: (x, y, β) 。

3. 约束

约束是指限制物体或体系运动的各种装置, 分外部约束(体系与基础之间的联系, 即支座)和内部约束(体系内部各杆或结点之间的联系)两种。由于结构是由各种构件通过约束组合成不变体系的, 它的自由度应该等于或小于零, 所以约束也是能减少刚片自由度的装置。常见的约束装置的类型有下列几种。

(1) 链杆。

链杆可减少一个自由度, 相当于一个约束, 如图 2.4 所示。

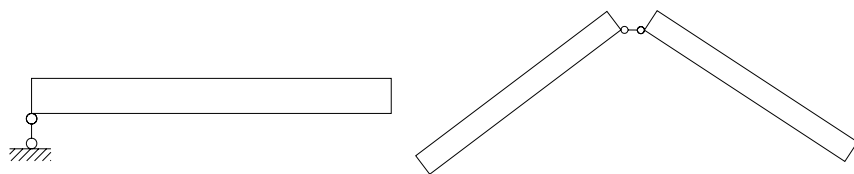


图 2.4 链杆约束

(2) 单铰。

一个单铰可以减少两个自由度, 相当于两个约束, 如图 2.5 所示。

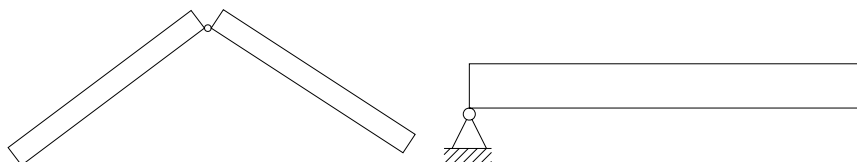


图 2.5 单铰约束

(3) 复铰。

所谓复铰，是指连接两个以上刚片的铰，如图 2.6 所示。

连接 n 个刚片的复铰，相当于 $n-1$ 个单铰。

(4) 刚结点。

一个刚结点能减少 3 个自由度，相当于 3 个约束，如图 2.7 所示。

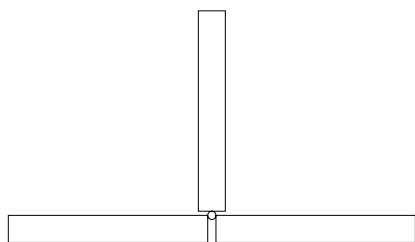


图 2.6 复铰约束

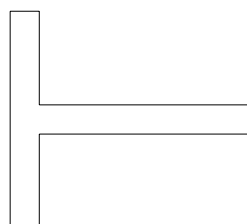


图 2.7 刚结点

4. 必要约束和多余约束

所谓必要约束，是指保证体系几何不变所需的最少的、合理约束；相反，必要约束以外的约束就称为多余约束。多余约束不改变体系的自由度。

5. 瞬变体系

瞬变体系指原来是几何可变，经微小位移后又成为几何不变的体系。图 2.8 所示两个刚片用 3 根互相平行但不等长的链杆联结，它是几何可变的。刚片 I 相对刚片 II 发生一个微小的位移 Δ 后， $\beta_1 = \frac{\Delta}{L_1}$ ， $\beta_2 = \frac{\Delta}{L_2}$ ， $\beta_3 = \frac{\Delta}{L_3}$

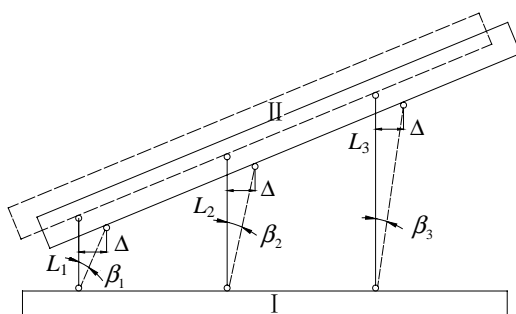


图 2.8 瞬变体系

由于 $\beta_1 \neq \beta_2 \neq \beta_3$ ，也就是说当两刚片发生了微小的相对运动后，3 根链杆就不再平行

了，也不交于一点，故体系就变成了不可变体系。这种在短暂的瞬间是几何可变的体系称为瞬变体系。瞬变体系的几种情况如下。

(1) 两个刚片用 3 根互相平行但不等长的链杆联结，如图 2.8 所示。

如果 3 根链杆互相平行又等长，体系是可变的，如图 2.9 所示。

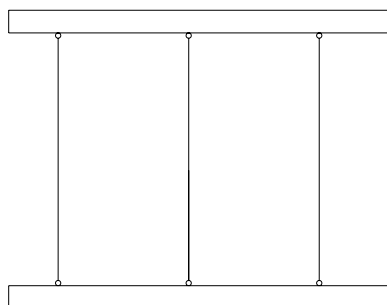


图 2.9 几何可变体系

(2) 两个刚片用 3 根其延长线交于一点的链杆联结。

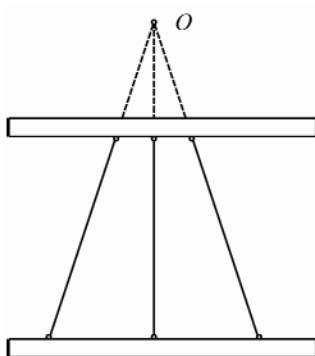


图 2.10 瞬铰(虚铰)

图 2.10 中 3 根链杆的延长线交于点“O”，两刚片在瞬间就会发生绕“O”点的相对转动，但是在短暂的运动发生以后，3 根链杆的延长线不再交于一点，体系就变成了不可变体系。“O”称为虚铰或瞬铰。如果 3 根链杆直接交于点“O”，则组成的是可变体系，如图 2.11 所示。此时“O”称为实铰。

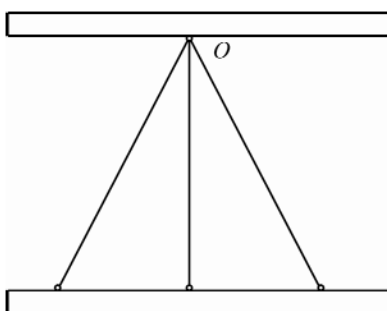


图 2.11 实铰

(3) 3 个刚片用 3 个在一条直线上的铰两两联结。

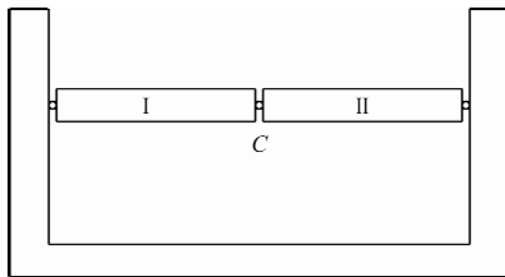


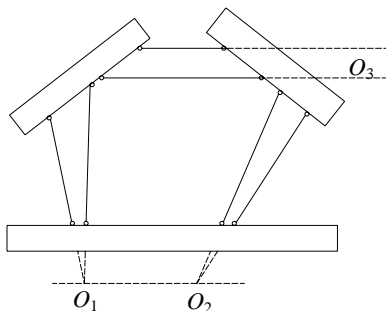
图 2.12 瞬变体系

图 2.12 中, 在 C 点两刚片(I、II)有共同的运动趋势, 因此它们可沿公共切线做微小的运动, 但运动以后, 3 个铰就不再共线, 体系变成了不可变体系。

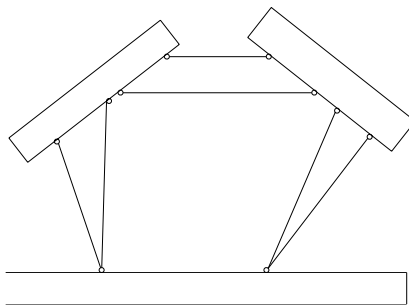
(4) 3 个刚片用 3 对链杆联结情况。

① 一对链杆平行。

图 2.13(a)中, 两虚铰(O_1 、 O_2)的连线与组成无穷远铰(O_3)的两链杆平行, 体系是瞬变的。若两虚铰变成两实铰, 如图 2.13(b)所示, 且连线与组成无穷远铰的链杆平行, 体系也是瞬变的。若两虚铰的连线与组成无穷远铰的链杆不平行, 体系是不变的。



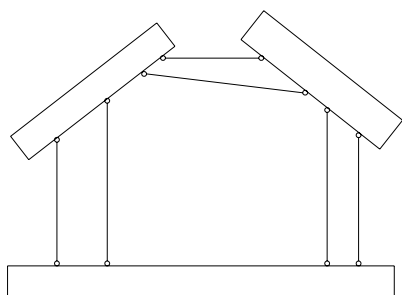
(a) 两虚铰连线与组成无穷远铰两链杆平行



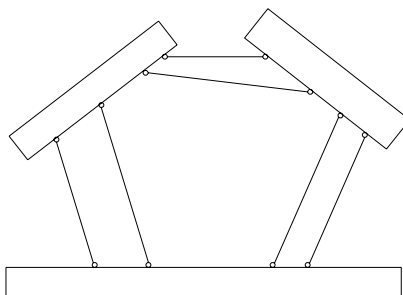
(b) 两实铰连线与组成无穷远铰两链杆平行

图 2.13 一对链杆平行

② 两对链杆平行。



(a) 两对链杆平行



(b) 两对链杆不平行

图 2.14 两对链杆平行

组成无穷远铰的两对链杆互相平行, 体系是瞬变的, 如图 2.14(a)所示。组成无穷远铰的两对链杆互相不平行, 体系是几何不变的, 如图 2.14(b)所示。若组成无穷远铰的两对链杆互相平行又等长, 体系是可变的。

③ 3 对链杆都平行。

图 2.15 所示结构中, 组成体系中 3 个瞬铰的 3 对链杆两两平行, 所组成的结构体系是瞬变的。

尽管瞬变体系在经过微小的位移后可以变成几何不变体系, 但瞬变体系不能作为结构使用, 如图 2.16 所示结构为一瞬变体系。

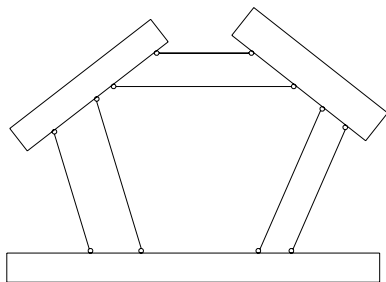


图 2.15 三对链杆都平行

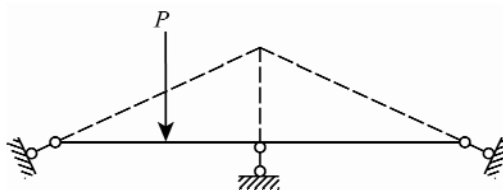


图 2.16 瞬变体系 1

由静力平衡条件:

$$\sum X = 0 \quad R_A = R_C \quad (2-1)$$

$$\sum M_A = 0 \quad R_B L + R_C h = P a \quad (2-2)$$

$$\sum M_C = 0 \quad R_B L + R_A h = P b \quad (2-3)$$

其中 R_A 、 R_B 和 R_C 分别为 A、B 和 C 支座的支座反力由式(2-2)式(2-3)得: $R_A \neq R_C$, 与式(2-1)矛盾, 因此无解。这是因为瞬变体系在图示状态是可变的, 因此不能运用平衡原理。再看一个例子, 如图 2.17 所示为一瞬变体系, 经过微小的位移 δ 后, 变成几何不变体系。

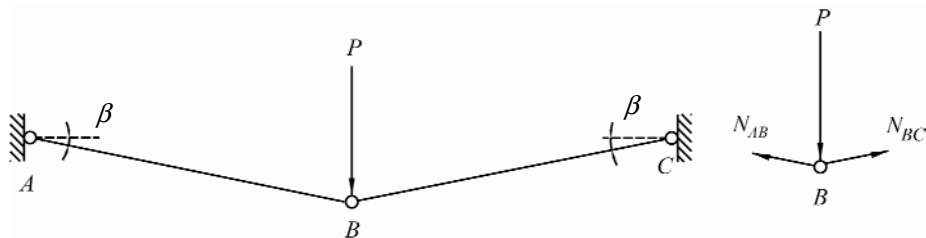


图 2.17 瞬变体系 2

取 C 结点研究, 由静力平衡条件:

$$\sum Y = 0 \quad 2N_{CA} \sin \beta = P$$

得到:

$$N_{CA} = \frac{P}{2 \sin \beta}$$

若 β 很小, N_{CA} 就趋向无穷大。由此可以看出, 瞬变体系是不能作为结构使用的。

2.2 体系的计算自由度

为了能对结构的几何组成分析进行量化,引入计算自由度 W 的概念。在给出计算自由度 W 的定义前,先给出计算自由度 S 的算法。假设结构体系中约束都不存在,各构件的自由度综合为 a ;再确定结构体系的必要约束个数为 c ,则结构体系的自由度 S 为:

$$S = a - c \quad (2-4)$$

在使用式(2-4)前必须区分必要约束和多余约束,这个问题往往很困难。为了回避这个困难,构造新的参数计算自由度 W :

$$W = a - d \quad (2-5)$$

式中, d 全部约束个数,避免了研究哪些约束是多余约束 m 的难题。

由于多余约束和必要约束的和就是全部约束,所以有

$$S - W = m \quad (2-6)$$

式(2-6)就是计算自由度 W 、自由度 S 、多余约束 m 三者之间的关系。下面由式(2-5)导出 W 的两种具体算法。

(1) 把结构体系看成是由刚片受约束而组成的。

以 p 表示体系中刚片的个数,则刚片的总自由度为 $3p$ 。以 g 代表单刚节点的个数(复约束应事先拆成单约束), h 代表单铰节点个数, b 代表单链杆个数,则总的约束个数为 $3g+2h+b$ 。体系的计算自由度 W 为:

$$W = 3p - (3g + 2h + b) \quad (2-7)$$

(2) 把体系看成节点受链杆的约束而组成的。

以 j 代表节点个数, b 代表单链杆个数,则体系的计算自由度 W 为:

$$W = 2j - b \quad (2-8)$$

由式(2-7)、式(2-8)算出的 W 值可能为正、负或零。所以根据算出的 W 值还不能得出自由度 S 和多余约束 m 的确切值,但可以得出它们的差值 $S - m = W$,也可以得出 S 和 m 的下限值,从而得出以下定性结论,见表 2-1。

表 2-1

W 的数值	几何组成性质
$W > 0$	体系是几何可变的
$W = 0$	若无多余约束则为几何不变;如有多余约束则为几何可变
$W < 0$	体系有多余约束。若为体系几何不变,则为超静定结构

【例 2-1】 计算图 2.18 所示结构的计算自由度。

解:把图 2.18(a)所示体系的全部支座去掉以后,剩下的是一个内部有多余约束的刚片。如果再在截面 G 处切开,这样才变为无多余约束的刚片,如图 2.18(b)所示。按式(2-7)计算,刚片数 $p=1$,链杆个数 $b=4$,铰结数 $h=0$, A 、 B 、 G 3 处的单刚结数 $g=3$,因此, $W = 3p - (3g + 2h + b) = 3 \times 1 - (3 \times 3 + 2 \times 0 + 4) = -10$,由于这个体系是几何不变的,故自由度为零,因此,由式(2-6)可以求出多余约束数 m 如下。

$$m = S - W = 0 - (-10) = 10$$

这是一个具有 10 个多余约束的几何不变体系。

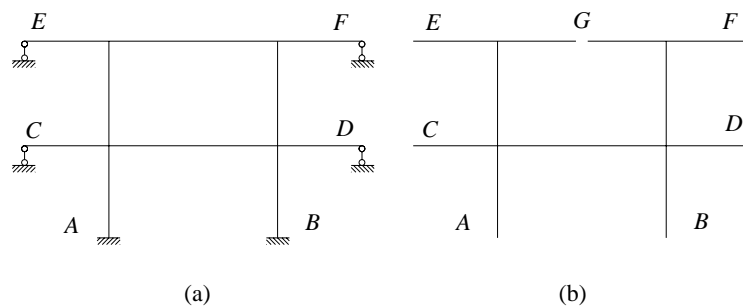


图 2.18 计算自由度

2.3 平面几何不变体系的基本组成规则

本节讨论无多余约束的几何不变体系的组成规则，它是几何组成分析的基础。

1. 1 个点与 1 个刚片之间的联结方式(图 2.19)

规律 1: 1 个刚片与 1 个点用两根链杆相连，且 3 个铰不在一条直线上，则组成几何不变体系，并且没有多余约束。

将图 2.20 所示的部分称为二元体，则以上规律还可以这样叙述：在 1 个刚片上加上 1 个二元体，仍为无多余约束的几何不变体系。即在一个体系上加上或去掉 1 个二元体，是不会改变体系原来性质的。这一规律称为二元体法则。

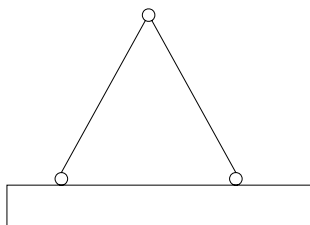


图 2.19 点与刚片联结

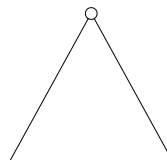


图 2.20 二元体

利用以上规律，可以组成所需的不变体系，如图 2.21 所示。

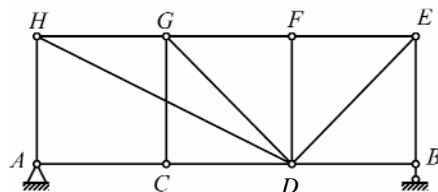


图 2.21 不变体系

2.2 个刚片之间的联结方式

在图 2.19 的基础上, 将一根链杆看做刚片, 如图 2.22 所示。这时二者在几何组成性质上是等价的, 即图 2.22 所示结构也是无多余约束的几何不变体系。于是, 我们可以得到以下规律。

规律 2: 2 个刚片用一个铰和一根链杆相联结, 且 3 个铰不在一条直线上, 则组成几何不变体系, 并且无多余约束。这一规律称为两刚片法则。

(3) 3 个刚片之间的联结方式

在图 2.19 的基础上, 将其中的两根链杆均看作刚片, 如图 2.23 所示。这时它仍然是无多余约束的几何不变体系。于是, 我们可以得到以下规律。

规律 3: 3 个刚片用 3 个铰两两相连, 且 3 个铰不在一条直线上, 则组成几何不变体系, 并且无多余约束。这一规律称为三刚片法则。

以上 3 条规律实际上可以归纳为一个基本规律: 三角形规律即如果三个铰不共线, 则一个铰结三角形的形状是不变的, 而且没有多余约束。

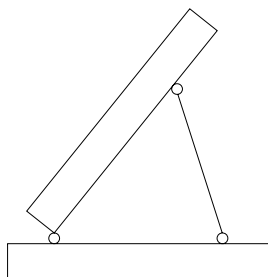


图 2.22

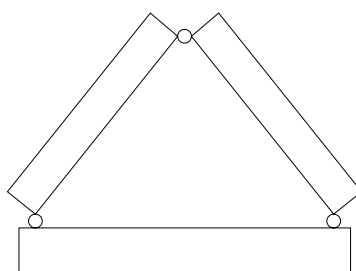


图 2.23

前面说过: 一根链杆相当于一个约束, 一个单铰相当于两个约束, 因此一个单铰可以用两根链杆来代替。于是, 图 2.22 和图 2.24 中的结构在几何组成性质上是等价的。因此两刚片法则又可以描述如下。

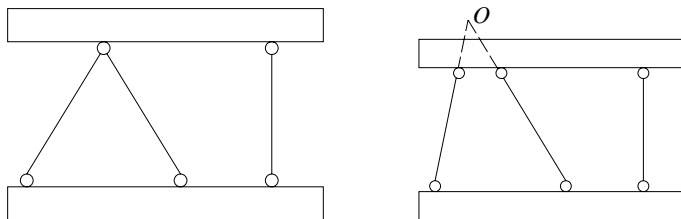


图 2.24

规律 4: 2 个刚片用 3 根不交于一点的链杆相连, 则组成几何不变体系, 并且无多余约束。

2.4 平面体系几何组成分析示例

利用以上规律, 我们可以组成各种各样的几何不变体系, 也可以对已组成的体系进行几何构造分析。

1. 组装几何不变体系

(1) 从基础出发进行组装。

把基础作为一个刚片，然后运用各条规律把基础和其它构件组装成一个不变体系。

【例 2-2】 分析下列结构的几何组成性质，如图 2.25(a)所示。

图 2.25(a)中基础为几何不变部分，可把它看做刚片，在此基础上一次加上二元片，由二元片法则，体系为无多余约束几何不变体系，如 2.25(b)所示。

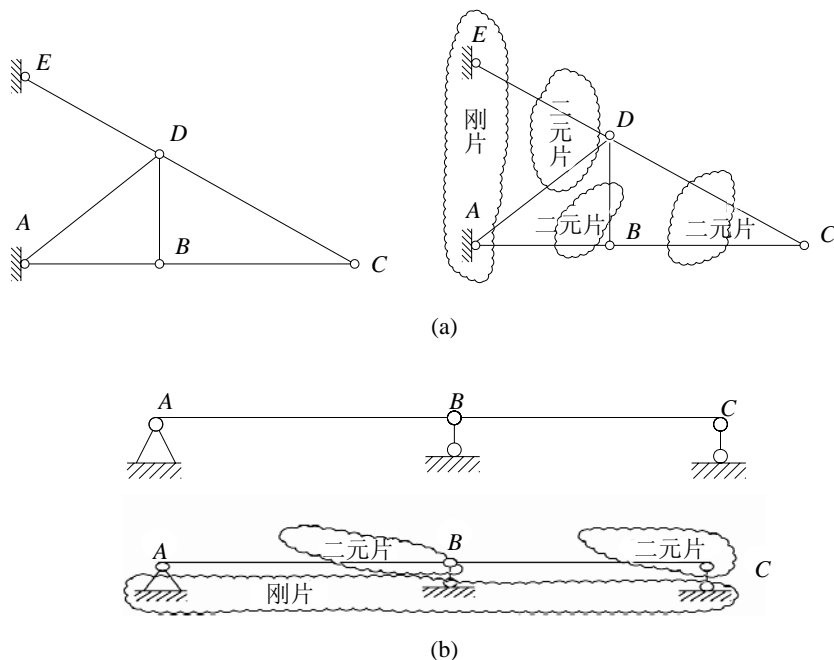


图 2.25

(2) 从上部体系出发进行组装。

先运用各条规律把上部结构组装成一个几何不变体系，然后运用规律 4 把它与基础相连。

【例 2-3】 分析图 2.26 所示结构的几何组成性质。

将图 2.26(a)中的铰接三角形 ABG 、 CED 看作刚片，两刚片由铰 F 和链杆 BC 联结，由于 BC 不通过铰 F ，由两刚片法则，上部结构为无多余约束几何不变体系，将其看作刚片，另外将基础看作刚片，则由两刚片法则，整体结构为无多余约束几何不变体系。

将图 2.26(b)中的铰接三角形 ACD 、 BEF 看作刚片，两刚片由不交于同一点的三根链杆 AF 、 ED 和 BC 联结，由规律 4，上部结构为无多余约束几何不变体系。将其看作刚片 I，将基础看作刚片 II，两刚片由铰支座 A 和不通过 A 的链杆支座 B 联结，由两刚片法则，整体结构为无多余约束几何不变体系。

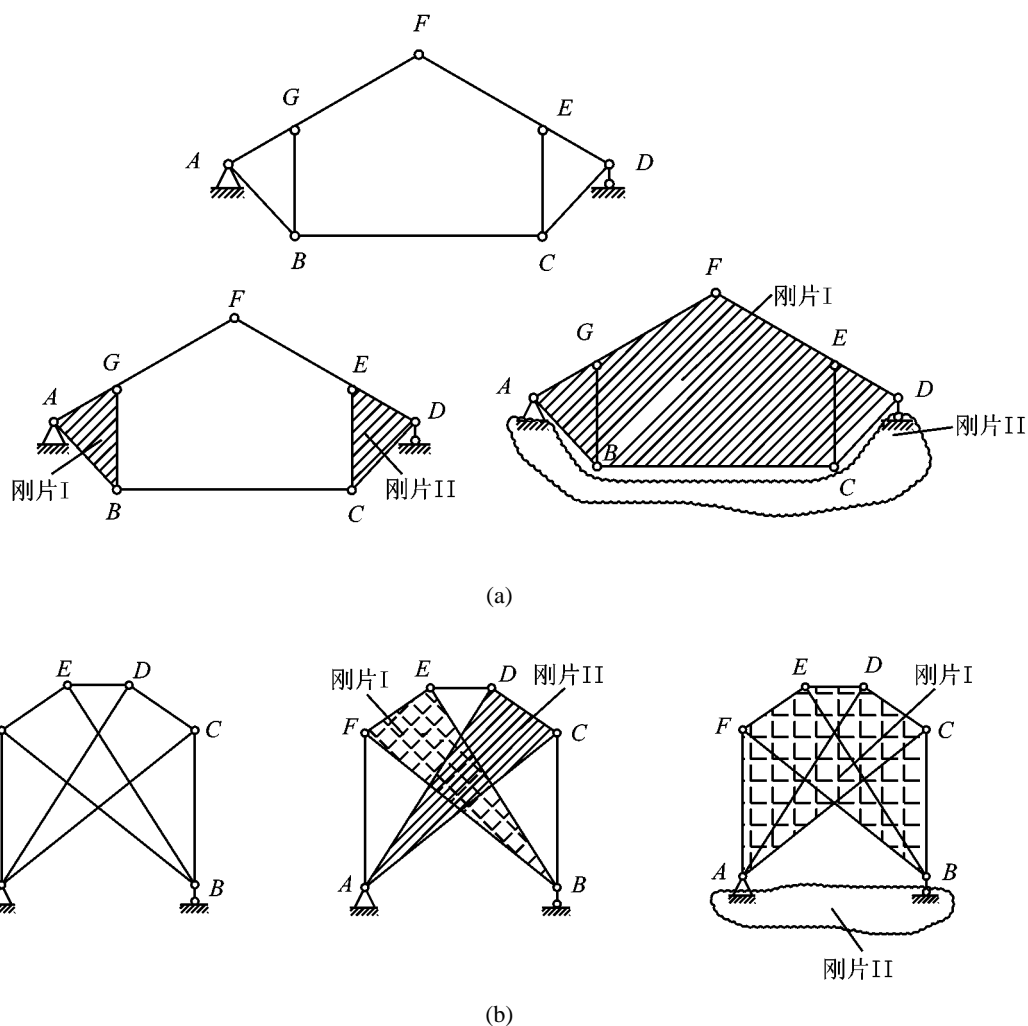


图 2.26

2.5 体系的几何构造与静定性

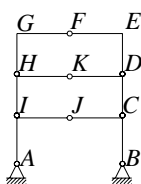
作为实际工程中的结构体系，其几何组成必须是几何不变的。而从上节的例题中可知，几何不变体系又可分为无多余约束的和有多余约束的体系。有多余约束几何不变体系中的约束除了满足几何不变性的要求外，还有多余的。

对于无多余约束的几何不变体系，结构的全部支座反力和内力都可由静力平衡条件求得，且为唯一解，这类结构称为静定结构。

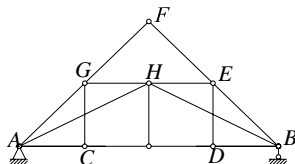
对于有多余约束的几何不变体系，由于多余约束的存在，结构中的未知力的个数超过了静力平衡方程个数，所以此类结构的反力和内力不能由静力平衡条件全部求出，必须补充其他条件才能求出所有反力和内力，比如补充变形协调条件。这类结构称为超静定结构。

2.6 习 题

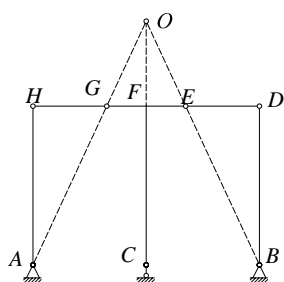
1. 试对下列结构进行几何组成分析。



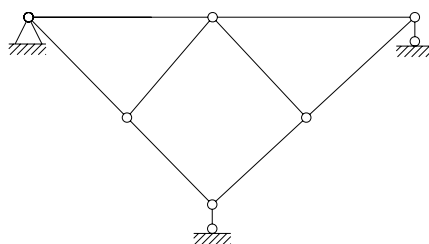
(a)



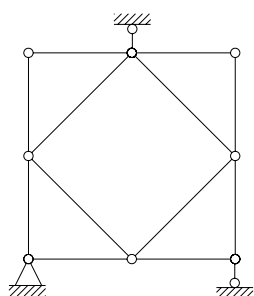
(b)



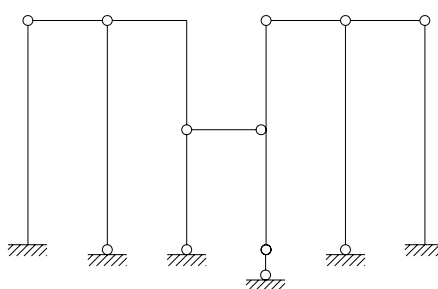
(c)



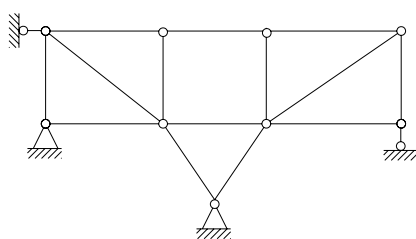
(d)



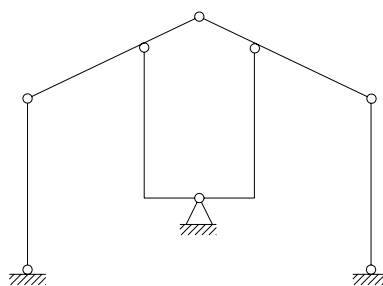
(e)



(f)



(g)



(h)

2. 计算上题中图示体系的自由度。