

第3章 静定结构的内力计算

教学提示：本章结合几种典型结构型式讨论静定结构的受力分析问题，涉及静定平面梁、静定平面刚架、静定平面桁架、拱、组合结构等。内容包括支座反力和内力的计算、内力图的绘制、受力性能的分析。静定结构的受力分析，主要是确定各类结构由荷载所引起的内力和相应的内力图。本章将在理论力学的受力分析和材料力学的内力分析的基础上，主要是应用结点法、截面法和内力与荷载之间的微分关系来计算静定平面梁、静定平面刚架、静定平面桁架、拱、组合结构，内容包括支座反力和内力的计算、内力图的绘制、各种结构受力性能的分析。

教学要求：本章让学生掌握轴力、弯矩和剪力的概念及其正负号的规定；能灵活运用结点法、截面法和内力与荷载之间的微分关系计算静定结构的支座反力和各截面内力并绘制内力图；理解不同结构的受力特性。

3.1 单跨静定梁

静定结构就是无多余约束的几何不变体系。全部支座反力和内力都可用静力平衡方程求出，且解答是唯一的。

平面结构的任一杆件的截面一般有3种内力：轴力 N 、剪力 V 、弯矩 M 。二力杆(链杆)只有轴力。其正负号规定如下，如图3.1所示。

轴力：以受拉为正，截面的外法线方向画出。

剪力：以绕隔离体顺时针方向为正，截面的切线方向画出。

弯矩：不规定正负号，其值画在杆件受拉纤维一侧。

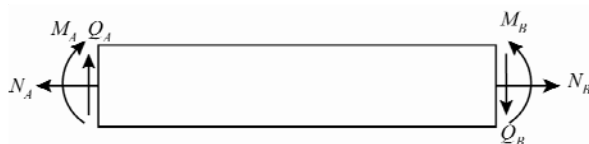


图 3.1 平面结构内力及其正方向约定

3.1.1 截面法求指定截面的内力

截面法是求解结构内力的基本方法，即将杆件在指定截面切开(图3.2)，取其中任一部分为研究对象，利用静力平衡条件，确定截面的3个内力分量。用截面法取研究对象时应注意如下问题。

- (1) 与研究对象(隔离体)相连接的所有约束都要切断，并以相适应的约束力代替。
- (2) 不可遗漏作用于研究对象上的力，包括荷载、约束力(内力和支反力)。

(3) 对于未知力,总是假定为其正方向,如果求出的结果为正值,说明实际作用方向与假设方向相同,如果其值为负,则说明实际作用方向与假设相反。

(4) 在利用平衡方程时,尽量避免解联立方程。

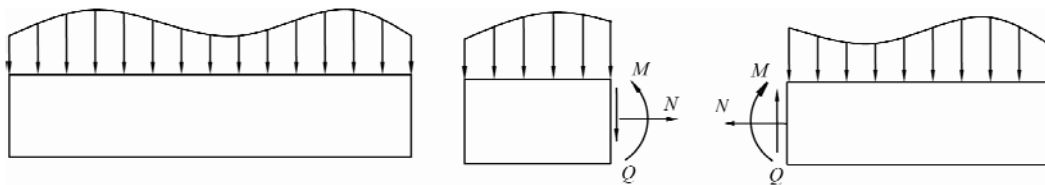


图 3.2 截面法研究对象及内力表达

内力求出后,用内力图直观明了地表示杆各截面的内力变化,直观明了。作图时,把内力的大小按一定的比例尺,以垂直于杆轴的方向标出,且规定:剪力和轴力画在杆的任一侧,标明正负号、大小;弯矩画在杆件的受拉纤维一侧,标明大小,不标明正负号。过程如图 3.3 所示。

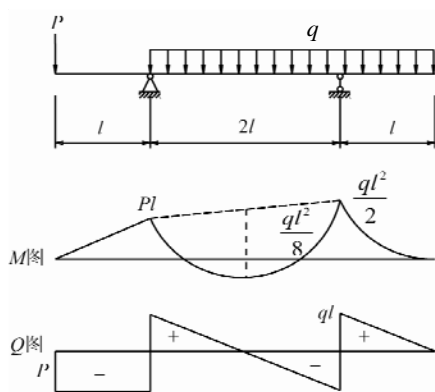


图 3.3 内力图

3.1.2 内力与荷载的关系

为了能找到结构内力图的简化作法,现针对常见的荷载,推导结构杆件内力 M 、 Q 与荷载集度 q 之间的微分关系。取图 3.4 所示的单元体,假设荷载向下为正。

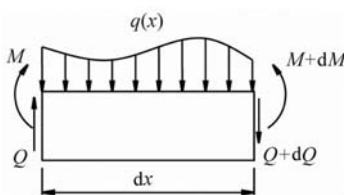


图 3.4 单元体

考虑平衡关系,以右侧截面形心为矩心, $\sum M = 0$, 有

$$Qdx + M - (M + dM) - \frac{q(x)}{2}(dx)^2 = 0$$

忽略高阶微量，得：

$$\frac{dM}{dx} = Q \quad (3-1)$$

由 $\sum Y = 0$ ，有

$$Q - q(x)dx - (Q + dQ) = 0$$

得：










$$\frac{dQ}{dx} = -q(x) \quad (3-2)$$

将(3-1)式代入(3-2)式，得：

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = \frac{dQ}{dx} = -q(x) \quad (3-3)$$

将常见的荷载形式代入荷载与内力的微分关系式(3-1)~式(3-3)，将相应的内力图特征集中于表 3-1。

表 3-1 常见荷载的内力图特征

常见荷载形式		内力图主要特征
均布荷载		Q 图  Q_0 Q_0 M 图  Q_0 Q_0
集中荷载		Q 图  Q_0 Q_0 M 图  Q_0 Q_0
集中力偶		Q 图 保持原有的变化趋势 M 图  M_0
铰结点		弯矩为零

3.1.3 分段叠加法作弯矩图

对结构中的直杆段作弯矩图时，可以采用分段叠加法，使绘图工作得到简化。

如图 3.5 所示结构，可用截面法求得 CD 段 C 、 D 截面的内力。取 CD 为研究对象，画出如图 3.6 所示的受力图。

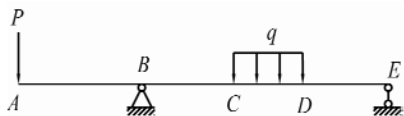


图 3.5 简支梁

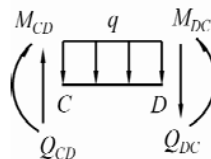


图 3.6 CD 段受力图

将 CD 段看作与 CD 段同跨度的简支梁，易计算 $R_C = Q_{CD}$ ， $R_D = Q_{DC}$ 。可见，简支梁的受力与 CD 段的受力完全一致(变形也相同)，则其所受荷载如图 3.7 所示。

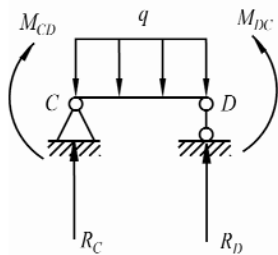


图 3.7 CD 段等同简支梁及其受力图

由内力图的特征和弯矩图的叠加原理，CD 梁的弯矩图如图 3.8 所示。

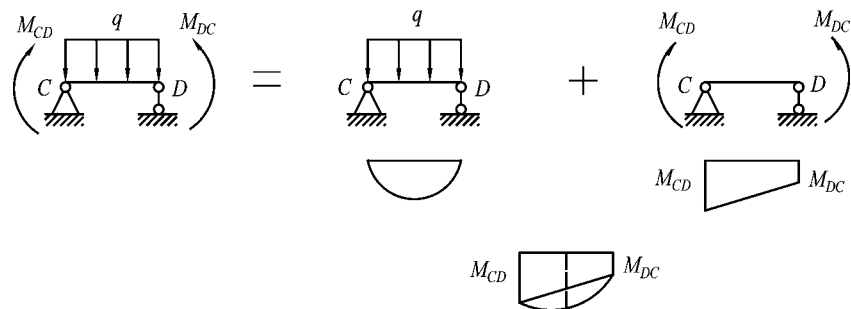


图 3.8 弯矩图的叠加

注意，图 3.8 中的弯矩叠加是纵坐标的叠加，即弯矩图的纵距是垂直于杆轴的，而不是几何图形的拼凑。

利用内力图的特征及弯矩图的分段叠加原理，可以将弯矩图的一般作法归纳如下。

(1) 以外力改变点(集中力作用点、集中力偶作用点、均布荷载的起点和终点)为控制截面，利用截面法控制截面的弯矩值。

(2) 将控制截面间的杆件看作简支梁，利用内力图的特征及控制点的弯矩值作出其弯矩图。

(3) 将所有分段的内力图叠加，得到结构的弯矩图。

3.2 多跨静定梁

多跨静定梁是由若干根梁用铰联结而成用来跨越几个相联结结构的静定梁。图 3.9 为公路桥梁中使用的多跨静定梁及其计算简图。

除了在桥梁方面较常采用这种结构形式外，在房屋建筑中的檩条有时也采用这种形式。图 3.10 所示为一多跨木檩条的构造及其计算简图。在檩条接头处采用斜搭接的形式中间用一个螺栓系紧，这种接头不能抵抗弯矩但可防止所连构件在横向或纵向的相对移动，故可看作铰接。

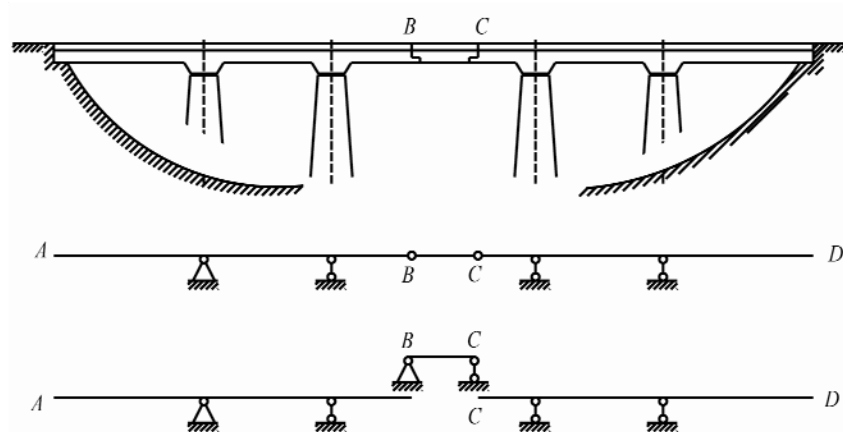


图 3.9 公路桥梁中使用的多跨静定梁及其计算简图

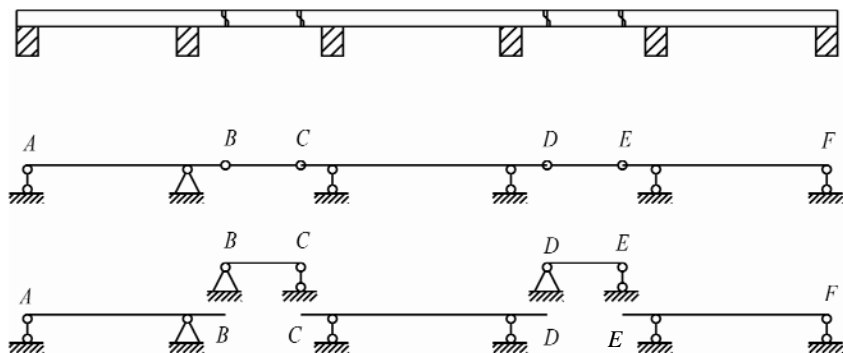


图 3.10 多跨木梁的构造及其计算简图

由多跨静定梁的几何组成分析可知，图 3.9 及图 3.10 中的 AB 直接由支座链杆固定于基础，是几何不变部分，而图 3.9 中的 CD 及图 3.10 中的 CD 和 EF 在竖向荷载作用下也能独立地维持平衡，我们称它们为基本部分；而其他各个部分必须要依靠其他部分的支撑才能保持保证其几何不变性，故称为附属部分。

为清晰起见，它们之间的支承关系可用图 3.11(a)~图 3.11(c)来表示。这种图称为层次图，它是按照附属部分支承于基本部分之上来作出的。

对于多跨静定梁，只要了解它的组成和各部分的传力次序，即不难进行内力计算。从层次图可以看出：基本部分的荷载作用并不影响附属部分，而附属部分的荷载作用则必传至基本部分。因此，在计算多跨静定梁时，应先计算附属部分，再计算基本部分。

二者之间的作用可以根据作用力和反作用力定理确定，即附属部分支座反力的反作用力，就是加于基本部分的荷载。这样多跨静定梁即可拆成若干单跨梁，分别计算。而后将各单跨梁的内力图相叠加，即得到多跨梁静定梁的内力图。

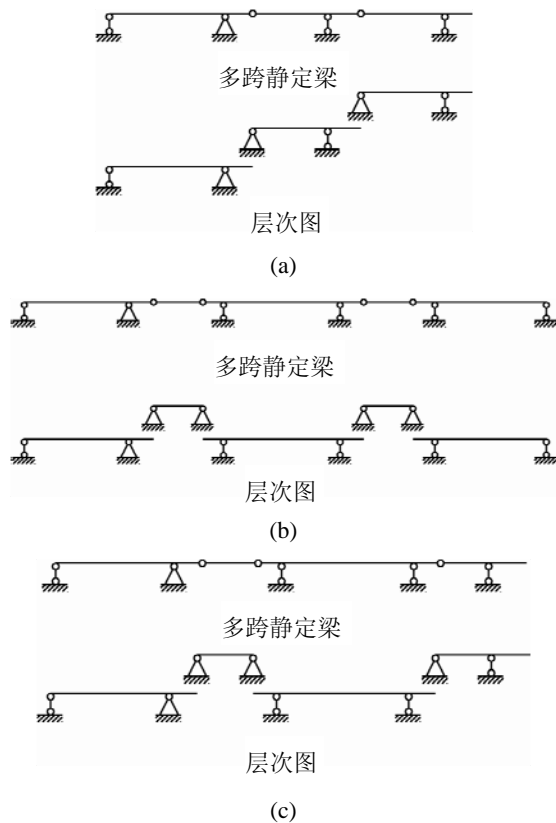


图 3.11 多跨静定梁及其层次图

【例 3-1】 作出图 3.12 所示多跨静定梁的弯矩图。

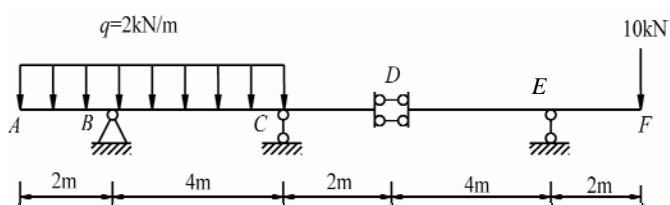


图 3.12 例 3-1 多跨静定梁图

解：(1) 根据题设条件，首先分析其几何组成，并作出层次图，如图 3.13 所示。

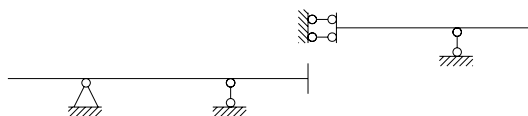


图 3.13 例 3-1 多跨静定梁层次图

(2) 作出附属部分内力图，由于附属部分是一个待悬臂端的简支梁，根据内力图的特征，可以很容易地作出其内力图，如图 3.14 所示。

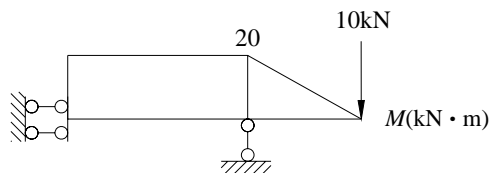


图 3.14 附属部分内力图

(3) 将附属部分的 D 支座的反力反方向作用于基本部分的 D 截面，得到基本部分的计算简图，如图 3.15 所示。同样可以作出其内力图，如图 3.16 所示。

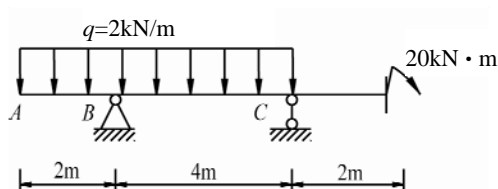


图 3.15 基本部分计算简图

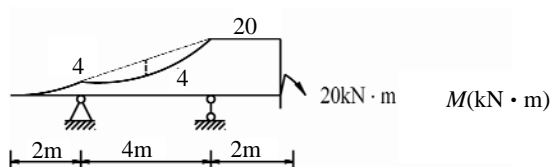


图 3.16 基本部分内力图

(4) 将图 3.14 和图 3.16 叠加，得到图 3.17 所示的原结构的弯矩图。

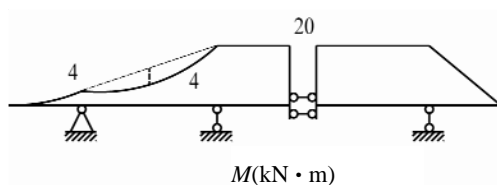


图 3.17 原结构的弯矩图

3.3 静定平面刚架

平面刚架是由若干直杆通过全部刚结点或部分刚结点连接所组成的结构。图 3.18 所示为平面桁架与平面刚架的计算简图。由于刚结点约束使各杆之间不能发生相对转动，因而各杆之间的夹角保持不变。从受力的角度来看，刚结点能承受和传递弯矩，所以刚架能提供较大的使用空间。刚架在工程结构中应用十分广泛。

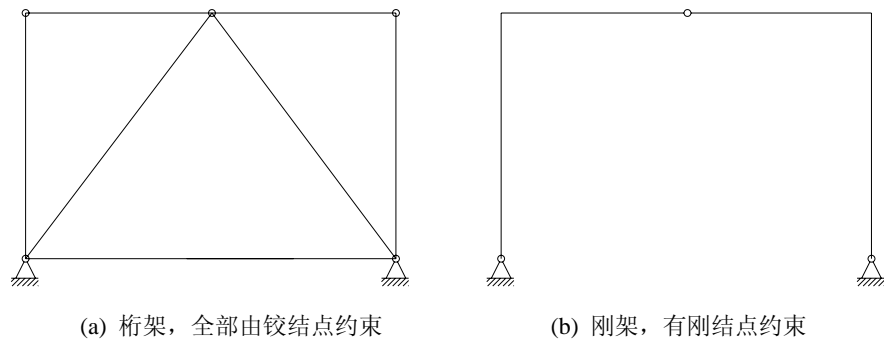


图 3.18 平面桁架与平面刚架计算简图

由于刚结点的特点，刚架中的主要内力是弯矩。同时由于刚结点能传递弯矩，所以可以使结构中的内力分布更为均匀，即结构中的弯矩峰值可以达到削减。

根据刚架受力特点，可以将其分为悬臂刚架、简支刚架、三铰刚架、组合刚架等。图 3.19 所示为常见的平面静定刚架及其计算简图。

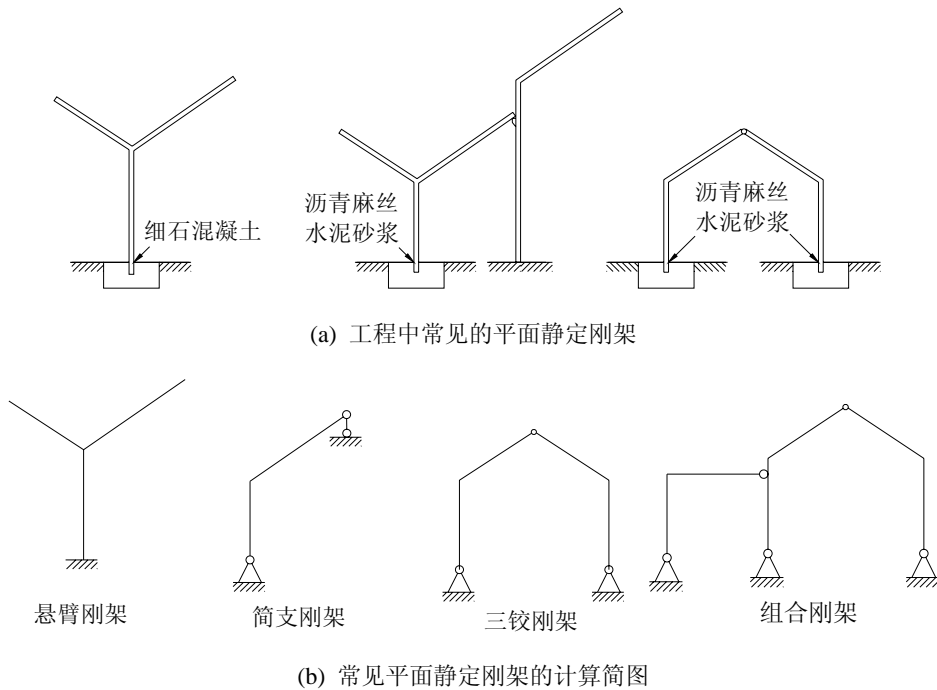


图 3.19 平面静定刚架

平面静定刚架的内力计算和梁一样，用截面法取隔离体，利用静力平衡条件求解未知力。其步骤通常是先进行几何构造分析，找出基本部分和附属部分；然后由整体或部分的平衡条件求出支反力；再逐杆求出杆端内力，最后由叠加原理得到结构的内力图。

3.3.1 支座反力的计算

刚架的支反力可以根据静力平衡条件来求得，但不同的刚架形式，求解时隔离体的选择不同。对于悬臂刚架和简支刚架，由于未知支反力只有 3 个，可以取整体为研究对象，3 个方程就可以解出 3 个未知数。对于三铰刚架和组合刚架，由于未知支反力多于 3 个，所以需要选取多个隔离体才能求出所有的未知支反力。下面用两个例子说明支反力的求法。

【例 3-2】 求图 3.20 和图 3.22 所示刚架所受支反力。

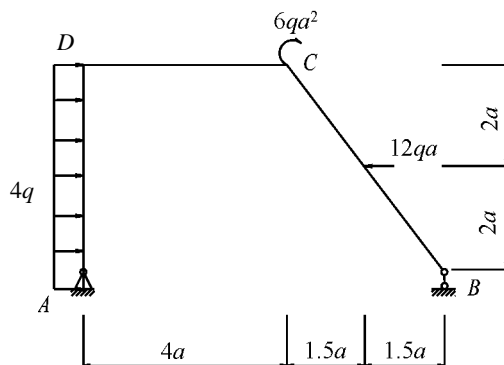


图 3.20 简支刚架

解：简支刚架所受支反力计算过程如下。

对于图 3.20 简支刚架，取整体为研究对象，计算简图如图 3.21 所示。

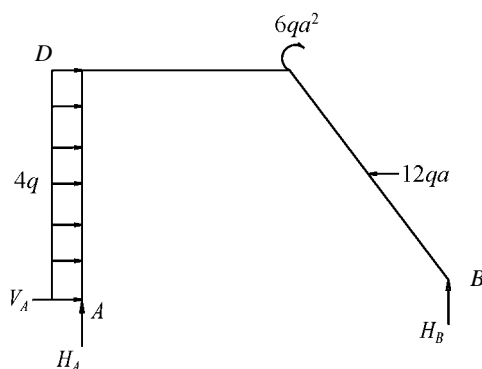


图 3.21 简支刚架所受支反力计算简图

考虑静力平衡，由：

$$\sum X = 0, \text{ 得 } V_A = 12qa - 4q \cdot 4a = -4qa \text{ (向左)}$$

$$\sum M_A = 0, \text{ 得 } H_B = \frac{6qa^2 + \frac{1}{2} \times 4q \times (4a)^2 - 12qa \times 2a}{4a + 1.5a + 1.5a} = 2qa \text{ (向上)}$$

$$\sum Y = 0, \text{ 得 } H_A = -H_B = -2qa \text{ (向下)}$$

经校核无误。

三铰刚架所受支反力计算过程如下。

(1) 对于图 3.22 简支刚架取整体为研究对象, 计算简图如图 3.23(a)所示。

考虑静力平衡, 由:

$$\sum M_B = 0 \quad H_A \times 8a = 4a \times q \times 6a \text{ 得 } H_A = 30a \text{ (向上)}$$

$$\sum Y = 0, \quad H_B = 10a \text{ (向上)}$$

(2) 取 CB 为研究对象, 计算简图如图 3.23(b)所示。

考虑静力平衡, 由:

$$\sum M_C = 0, \quad H_B \times 4a = -V_B \times 7a, \text{ 得 } V_B = -40a/7 \text{ (向左)}$$

(3) 再以整体为研究对象, 考虑静力平衡, 由:

$$\sum X = 0, \text{ 得 } V_A = -V_B = 40a/7 \text{ (向右)}$$

经校核无误。

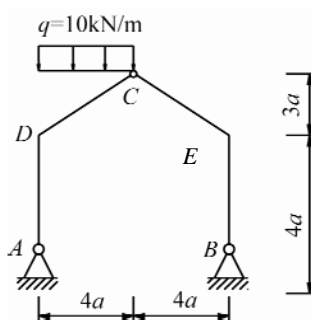


图 3.22 三铰刚架

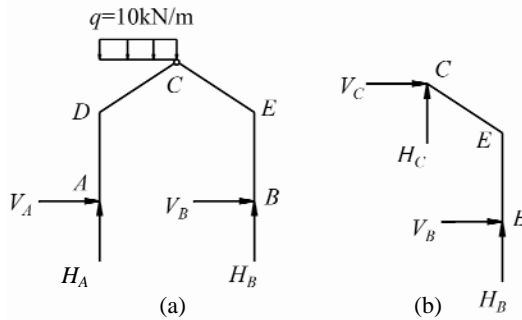


图 3.23 三铰钢架所受支反力计算简图

3.3.2 内力计算

在确定了刚架的支反力后, 可以用截面法求得每个控制点的内力值, 控制点的选取可以是外力改变点(集中力作用点、集中力偶作用点、均布荷载的起点和终点), 也可以是各杆的杆端(在刚架内力计算时, 一般选择各杆杆端为控制点), 逐杆求出各杆端内力。

【例 3-3】 计算图 3.24 所示悬臂刚架各杆杆端内力。

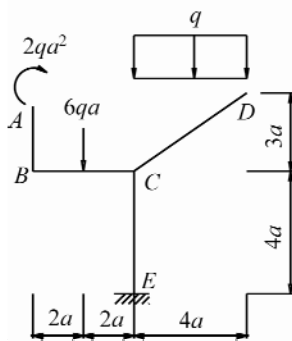


图 3.24 悬臂刚架

解: (1) 取 AB 为研究对象, 其受力情况如图 3.25(a)所示。

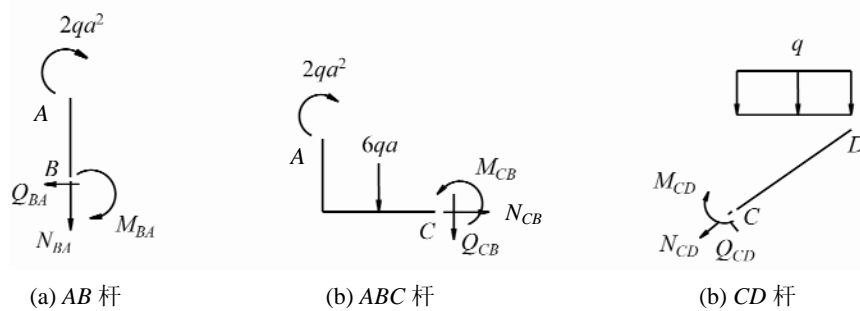


图 3.25 受力图

考虑静力平衡条件，由：

$$\sum M_B = 0, \quad 2qa^2 - M_{BA} = 0, \quad \text{得 } M_{BA} = 2qa^2 \text{ (左侧受拉)}$$

$$\sum X = 0, \quad \text{得 } Q_{BA} = 0$$

$$\sum Y = 0, \quad \text{得 } N_{BA} = 0$$

(2) 取 ABC 为研究对象，画出 ABC 杆的受力图如图 3.25(b)所示。

考虑静力平衡条件，由

$$\sum M_B = 0, \quad 2qa^2 - M_{CB} - 6qa \cdot 2a = 0, \quad \text{得 } M_{CB} = -10qa^2 \text{ (上侧受拉)}$$

$$\sum X = 0, \quad \text{得 } Q_{CB} = -6qa$$

$$\sum Y = 0, \quad \text{得 } N_{CB} = 0$$

(3) 取 CD 为研究对象，其受力图如图 3.25(c)所示。

考虑静力平衡条件，由：

$$\sum M_C = 0, \quad M_{CD} + q(4a)^2 / 2 = 0, \quad \text{得 } M_{CD} = -8qa^2 \text{ (上侧受拉)}$$

$$\sum X = 0, \quad N_{CD} + 4qa \times \sin \beta = 0, \quad \text{得 } N_{CD} = -2.4qa \text{ (受压)}$$

$$\sum Y = 0, \quad Q_{CD} - 4qa \times \cos \beta = 0, \quad \text{得 } Q_{CD} = 3.2qa$$

(4) 取整体为研究对象，其受力图如图 3.26 所示。

考虑静力平衡条件，由

$$\sum M_E = 0, \quad M_{EC} + q(4a)^2 / 2 + 2qa^2 - 6qa \times 2a = 0, \quad \text{得 } M_{EC} = 2qa^2 \text{ (右侧受拉)}$$

$$\sum X = 0, \quad \text{得 } Q_{EC} = 0$$

$$\sum Y = 0, \quad \text{得 } N_{EC} = -6qa - 4qa = -10qa \text{ (受压)}$$

(5) 取结点 C 的力矩平衡，画出杆端力矩受力图如图 3.27 所示。由

$$\sum M_C = 0, \quad M_{CB} + M_{CE} = M_{CD}, \quad \text{得 } M_{CE} = -2qa^2 \text{ (右侧受拉)}$$

经校核无误。

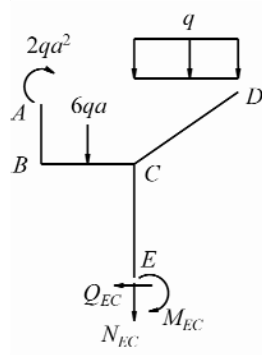


图 3.26 整体受力图

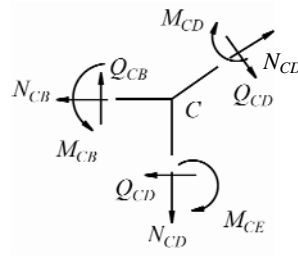


图 3.27 结点 C 受力图

【例 3-4】 计算如图 3.28 中刚架的各杆杆端内力。

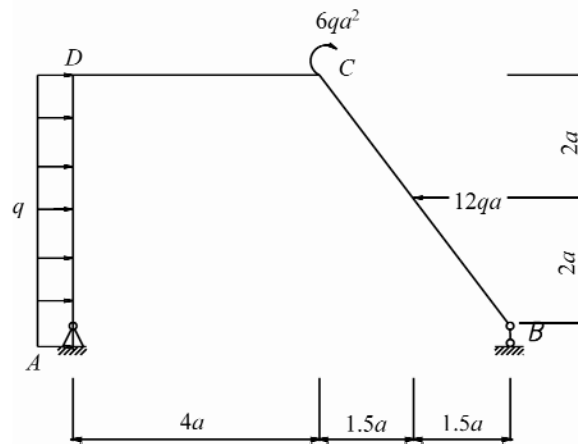


图 3.28 例 3-4 图

解: (1) 取 AD 为研究对象, 受力图如图 3.29 所示。

$$\sum X = 0, \quad Q_{DA} = -12qa$$

$$\sum Y = 0, \quad N_{DA} = 2qa$$

$$\sum M_D = 0, \quad V_A \cdot 4a + M_{DA} - 4q(4a)^2/2 = 0, \quad \text{得 } M_{DA} = 16qa^2 \text{ (左侧受拉)}$$

(2) 由结点 D 的弯矩平衡, $M_{DC} = 16qa^2$ (上侧受拉)

(3) 取 ACD 为研究对象, 受力图如图 3.30 所示。

$$\sum Y = 0, \quad Q_{DA} = -12qa$$

$$\sum X = 0, \quad N_{DA} = 2qa$$

$$\sum M_C = 0, \quad V_A \cdot 4a + H_A \cdot 4a - M_{CD} - 4q(4a)^2/2 = 0, \quad \text{得 } M_{DC} = -24qa^2 \text{ (上侧受拉)}$$

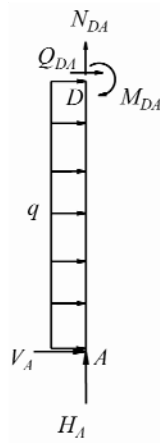


图 3.29 AD杆受力图

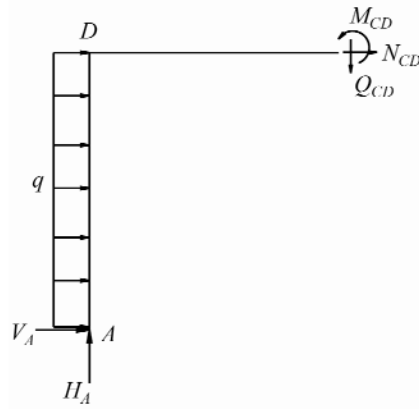


图 3.30 ACD受力图

(4) 从 C 结点的右侧截断，取 BC 为研究对象，受力图如图 3.31 所示。

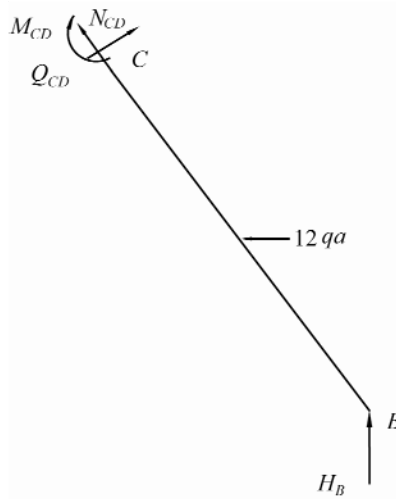


图 3.31 BC受力图

$\sum M_C = 0$ ，得 $M_{CB} = -18qa^2$ (外侧受拉)

$\sum X = 0$ ，得 $N_{CB} = -2qa \sin \beta - 12qa \cos \beta = -8.8qa$

$\sum Y = 0$ ，得 $Q_{CB} = -2qa \cos \beta + 12qa \sin \beta = 8.4qa$

(5) B 端剪力与轴力，把 $H_B = 2qa$ 向 X 、 Y 方向分解即可得到。

$N_{BC} = -1.6qa$ ， $Q_{BC} = -1.2qa$

经校核无误。

【例 3-5】 计算图 3.32 中刚架的各杆杆端内力。

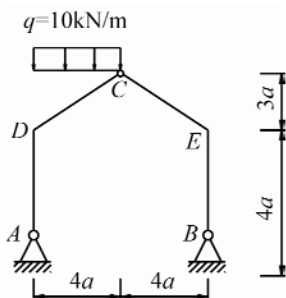


图 3.32 例 3-5 图

解: (1) 取 AD 为研究对象, 受力图如图 3.33(a)所示。

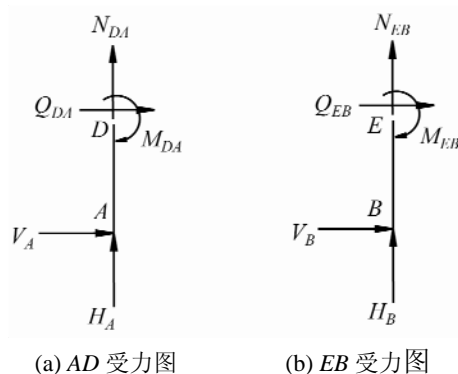


图 3.33

$$\sum M_D = 0 \quad M_{DA} = V_A \times 4a = 16qa^2/7 \quad (\text{左侧受拉})$$

由结点 D 的平衡, $M_{DC} = 16qa^2/7$ (外侧受拉)

$$\sum X = 0, \quad Q_{DA} = -4qa/7$$

$$\sum Y = 0, \quad N_{DA} = -3qa$$

(2) 取 EB 为研究对象, 受力图如图 3.33(b)所示。

$$\sum M_E = 0 \quad M_{EB} = -16qa^2/7 \quad (\text{右侧受拉})$$

由结点 E 的平衡, $M_{EC} = -16qa^2/7$ (外侧受拉)

$$\sum X = 0, \quad Q_{ED} = 4qa/7$$

$$\sum Y = 0, \quad N_{ED} = -qa$$

(3) 从 D 结点上侧截断, 取 AD 为研究对象, 受力图如图 3.34(a)所示。

$$\sum X = 0, \quad Q_{DC} + V_A \sin \beta - H_A \cos \beta = 0 \text{ 得 } Q_{DC} = 2.057qa$$

$$\sum Y = 0, \quad N_{DC} + V_A \cos \beta + H_A \sin \beta = 0 \text{ 得 } N_{DC} = -2.257qa$$

(4) 从 E 结点上侧截断, 取 EB 为研究对象, 受力图如图 3.34(b)所示。

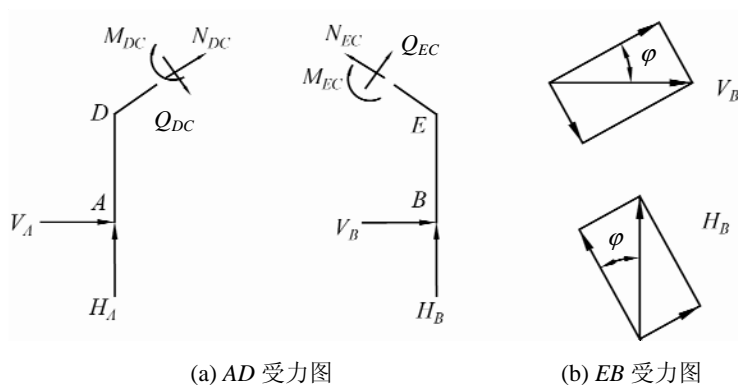


图 3.34

$$\sum X = 0, \quad N_{EC} + V_B \sin \beta + H_B \cos \beta = 0 \quad \text{得} \quad N_{EC} = -1.057qa$$

$$\sum Y = 0, \quad Q_{EC} + V_B \cos \beta - H_B \sin \beta = 0 \quad \text{得} \quad Q_{EC} = -0.257qa$$

(5) 取 ADC 为研究对象, 受力图如图 3.35 所示。

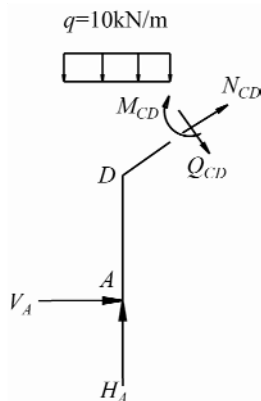


图 3.35 ADC 受力图

$$\sum X = 0, \quad Q_{CD} + V_A \sin \beta - H_A \cos \beta + 4qa \cos \beta = 0 \quad \text{得} \quad Q_{CD} = -1.143qa$$

$$\sum Y = 0, \quad N_{CD} + V_A \cos \beta + H_A \sin \beta - 4qa \sin \beta = 0 \quad \text{得} \quad N_{CD} = 0.143qa$$

经校核无误。

3.3.3 内力图的绘制

在逐杆求出各杆的杆端内力后, 可以利用叠加原理作出结构的内力图。在绘制内力图时, 弯矩图画在杆件受拉一侧, 标明大小, 不标正负号(不规定正负号); 剪力和轴力的符号规定与梁相同, 画在杆的任一侧, 要标明正负号。

【例 3-6】 分别绘制例 3-3~例 3-5 的内力图。

(1) 例 3-3 中已求出各杆杆端内力。

$$Q_{BA} = 0$$

$$N_{BA} = 0$$

$$M_{CB} = -10qa^2 \text{ (上侧受拉)}$$

$$Q_{CB} = -6qa$$

$$N_{CB} = 0$$

$$M_{CD} = -8qa^2 \text{ (上侧受拉)}$$

$$N_{CD} = -2.4qa \text{ (受压)}$$

$$Q_{CD} = 3.2qa$$

$$M_{EC} = 2qa^2 \text{ (右侧受拉)}$$

$$Q_{EC} = 0$$

$$N_{EC} = -6qa - 4qa = -10qa \text{ (受压)}$$

$$M_{CE} = -2pa^2 \text{ (右侧受拉)}$$

根据叠加原理及表 3-1 中内力图特征, 可作出其内力图如图 3.36 所示。

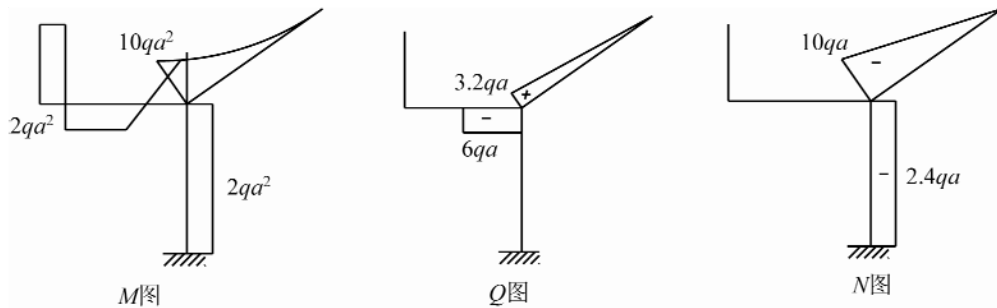


图 3.36 例 3-3 内力图

(2) 例 3-4 中已求出各杆杆端内力。

$$Q_{DA} = -12qa$$

$$N_{DA} = 2qa$$

$$M_{DA} = 16qa^2 \text{ (左侧受拉)}$$

$$M_{DC} = 16qa^2 \text{ (上侧受拉)}$$

$$Q_{CD} = -2qa$$

$$N_{CD} = -12qa$$

$$M_{DC} = -24qa^2 \text{ (上侧受拉)}$$

$$M_{CB} = -18qa^2 \text{ (外侧受拉)}$$

$$N_{CB} = -8.8qa$$

$$Q_{CB} = 8.4qa$$

$$N_{BC} = -1.6qa$$

$$Q_{BC} = -1.2qa$$

根据叠加原理及表 3-1 中内力图特征, 可作出其内力图如图 3.37 所示。

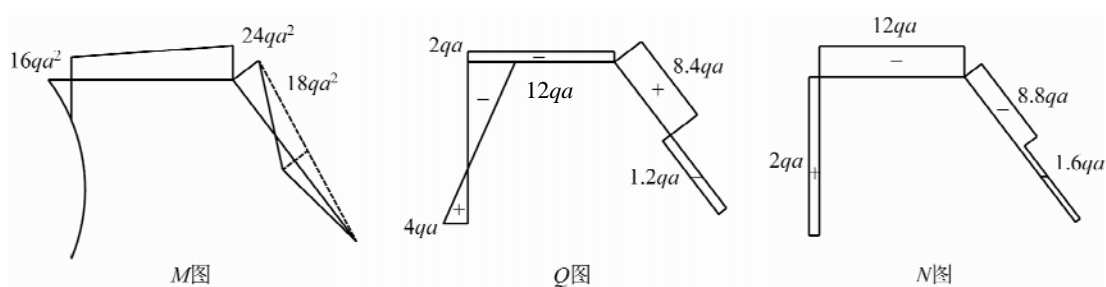


图 3.37 例 3-4 内力图

(3) 例 3-5 中已求出各杆杆端内力。

$$M_{DA} = 16qa^2 / 7 \quad (\text{左侧受拉})$$

$$M_{DC} = 16qa^2 / 7 \quad (\text{外侧受拉})$$

$$Q_{DA} = -4qa / 7$$

$$N_{DA} = -3qa$$

$$M_{EB} = -16qa^2 / 7 \quad (\text{右侧受拉})$$

$$M_{EC} = -16qa^2 / 7 \quad (\text{外侧受拉})$$

$$Q_{ED} = 4qa / 7$$

$$N_{ED} = -qa$$

$$Q_{DC} = 2.057qa$$

$$N_{DC} = -2.257qa$$

$$N_{EC} = -1.057qa$$

$$Q_{EC} = -0.257qa$$

$$Q_{CD} = -1.143qa$$

$$N_{CD} = 0.143qa$$

根据叠加原理及表 3-1 中内力图特征，可作出其内力图如图 3.38 所示。

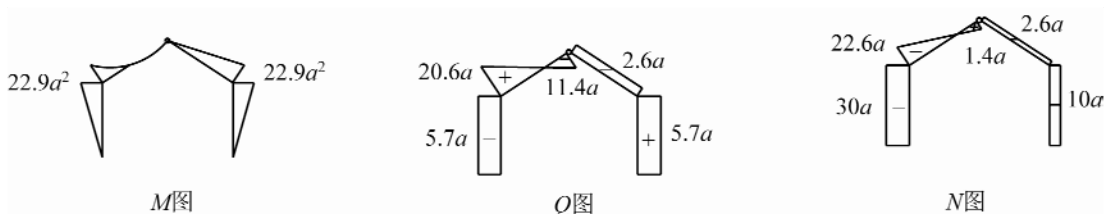


图 3.38 例 3-5 内力图

3.4 三 铰 拱

3.4.1 基本概念和类型

拱在我国建筑结构上的应用，已有悠久的历史，如我国河北省建于隋代大业元年至十

一年赵州桥。目前在桥梁核房屋建筑工程中，拱式结构的应用也很广泛，主要应用于礼堂、体育馆和展览馆等大空间的结构中。

拱的形式有无铰拱、二铰拱、带拉杆拱、三铰拱等，如图 3.39 所示。其中三铰拱是静定的，而两铰拱、无铰拱是超静定的。

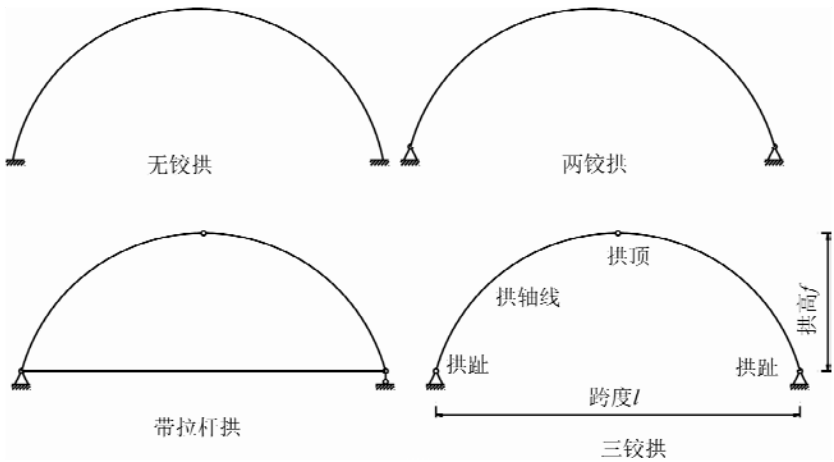


图 3.39 拱的形式

拱的各部分名称如图 3.39 所示。拱身各截面形心的连线称为拱轴线，拱结构的最高点称为拱顶，拱与支座的联结处称为拱趾，或拱脚，两个拱趾之间的距离称为跨度，拱顶到两拱趾连线的竖向距离称为拱高，或拱矢。

3.4.2 在竖向荷载作用下的支座反力计算

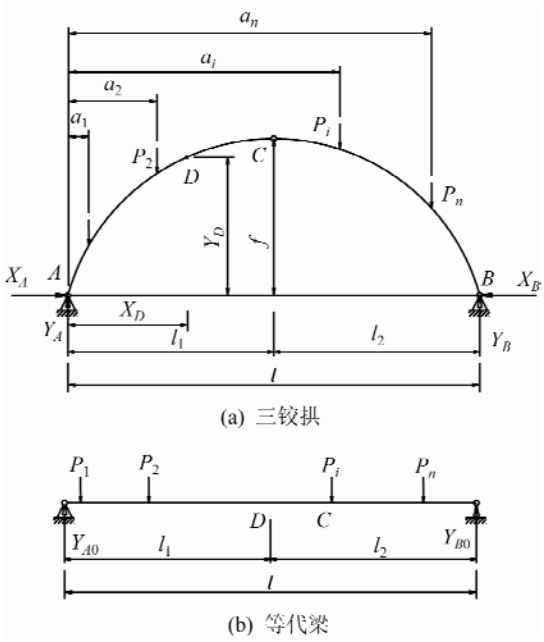


图 3.40

图 3.40(a)所示为竖向荷载作用下的三铰拱, 图 3.40(b)所示为与图(a)拱具有相同跨度的简支梁, 称为等代梁。

(1) 由拱的整体平衡, 和 $\sum M_B = 0$, $Y_A \cdot l - \sum_{i=1}^n P_i \cdot (l - a_i) = 0$ 得

$$Y_A = \frac{\sum_{i=1}^n P_i \cdot (l - a_i)}{l} \quad (3-4)$$

由 $\sum M_A = 0$, $Y_B \cdot l - \sum_{i=1}^n P_i \cdot a_i = 0$ 得

$$Y_B = \frac{\sum_{i=1}^n P_i \cdot a_i}{l} \quad (3-5)$$

由 $\sum X = 0$, 得

$$X_A = X_B = H \quad (3-6)$$

取顶铰 C 以左的部分为研究对象, 由 $\sum M_C = 0$, $Y_A \cdot l_1 - \sum_{i=1}^2 P_i (l_1 - a_i) - Hf = 0$, 得

$$H = \frac{Y_A \cdot l_1 - \sum_{i=1}^2 P_i (l_1 - a_i)}{f} \quad (3-7)$$

上式中的分子就是等代梁在截面 C 的弯矩 M_C^0 , 所以

$$H = \frac{M_C^0}{f} \quad (3-8)$$

式中, M_C^0 ——代梁 C 截面的弯矩。

由式(3-8)可知, 三铰拱在竖向荷载作用下, 其水平反力(推力)与拱的形状无关, 而仅与 3 个铰的位置有关。若竖向荷载和拱趾位置不变, 则随着拱矢 f 增大, 水平推力减小。反之, 拱矢 f 减小, 水平推力增大。

(2) 由等代梁的整体平衡, 可得

$$Y_A^0 = Y_A = \frac{\sum_{i=1}^n P_i \cdot (l - a_i)}{l} \quad (3-9)$$

$$Y_B^0 = Y_B = \frac{\sum_{i=1}^n P_i \cdot a_i}{l} \quad (3-10)$$

3.4.3 在竖向荷载作用下的内力计算

在求得支座反力后, 可以求出拱轴上任一截面的内力。现以图 3.40 中任意截面 D 为例, 导出内力计算公式。

取截面 D 以左部分为研究对象, 受力图如图 3.41 所示。

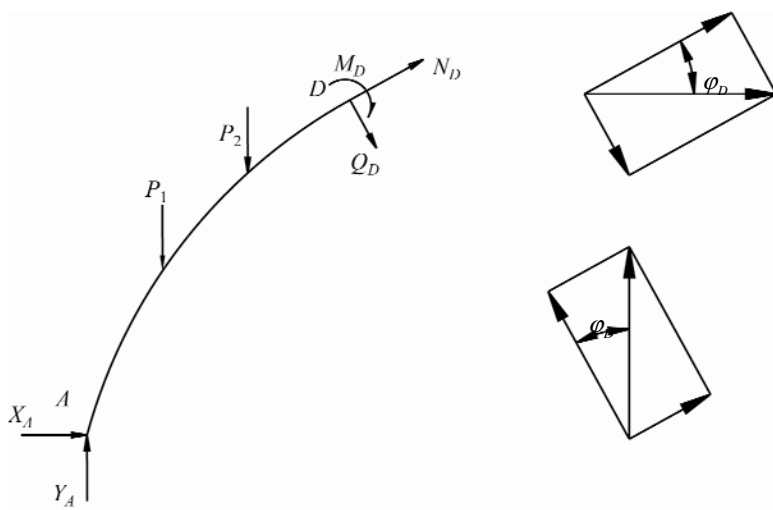


图 3.41

(1) 弯矩的计算。

弯矩符号规定以使拱内侧纤维受拉为正，反之为负。由

$$\begin{aligned}\sum M_D &= 0 \\ M_D &= Y_A \cdot x_D - H \cdot y_D - P_1 \cdot (x_D - a_1) - P_2 \cdot (x_D - a_2) \\ &= Y_A^0 \cdot x_D - P_1 \cdot (x_D - a_1) - P_2 \cdot (x_D - a_2) - H \cdot y_D\end{aligned}$$

即得 D 截面的弯矩：

$$M_D = M_D^0 - H \cdot y_D \quad (3-11)$$

式中， M_D^0 ——代梁对应于 D 处截面的弯矩。

即拱内任一截面的弯矩 M_D 等于等代梁上对应 D 截面的弯矩 M_D^0 减去推力所引起的弯矩 $H \cdot y_D$ 。由此可见，由于推力的存在，拱的弯矩比等代梁(相应的简支梁)的弯矩要小。

(2) 剪力计算。

剪力符号的规定是使截面两侧的脱离体有顺时针转动趋势的为正，反之为负。由

$$\sum Y = 0, \quad Q_D = (Y_A - P_1 - P_2) \cdot \cos \phi_D - H \cdot \sin \phi_D$$

即得 D 截面的剪力：

$$Q_D = Q_D^0 \cdot \cos \phi_D - H \cdot \sin \phi_D \quad (3-12)$$

式中， Q_D^0 ——等代梁截面 D 的剪力， $Q_D^0 = (Y_A - P_1 - P_2)$

(3) 轴力计算。

轴力的正负号规定与梁相同。由：

$$\sum X = 0, \quad N_D = (Y_A - P_1 - P_2) \cdot \sin \phi_D + H \cdot \cos \phi_D$$

即得 D 截面的轴力：

$$N_D = Y_D^0 \cdot \sin \phi_D + H \cdot \cos \phi_D \quad (3-13)$$

式(3-11)、式(3-12)及式(3-13)中的 ϕ_D 由轴线确定， ϕ_D 的符号在图示坐标系中左半拱为正，右半拱为负。

【例 3-7】 如图 3.42 所示拱轴方程为 $y = \frac{4f}{l^2}x(l-x)$ ，试求截面 D 的内力。

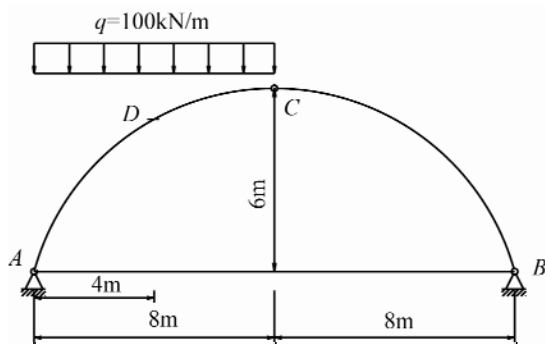


图 3.42

解：(1) 求支座反力。

取整体为研究对象，由：

$$\sum M_A = 0, \text{ 得 } Y_B = 200 \text{ kN}$$

$$\sum y = 0, \text{ 得 } V_A = 200 \text{ kN}$$

取 BC 为研究对象，由：

$$\sum M_C = 0, \text{ 得 } H = 800/3 \text{ kN}$$

(2) 取 AD 为研究对象，受力图如图 3.43 所示。

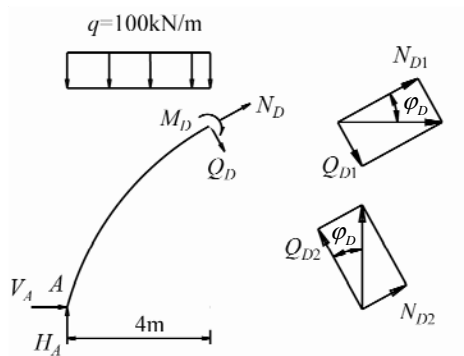


图 3.43

考虑静力平衡条件，由：

$$\sum M_D = 0, \text{ 得 } M_D = V_A \cdot 4 - H \cdot 4.5 - 100 \times 4 \times 2 = 400 \text{ kN} \cdot \text{m (内侧受拉)}$$

$$\tan \phi_D = y'|_{x=4} = \frac{3}{4}$$

建立图 3.43 所示坐标系，

$$\sum X = 0, \quad N_D = (600 - 400) \sin \phi_D + \frac{800}{3} \cos \phi_D = 333.33 \text{ (压力)}$$

$$\sum Y = 0, \quad Q_D = (600 - 400) \cos \phi_D - \frac{800}{3} \sin \phi_D = 0$$

3.4.4 合理拱轴线

拱在荷载作用下, 各截面上会产生 3 个内力分量, 截面处于偏心受压状态, 应力分布不均匀。如果能选取一根合适的拱轴线, 使得在荷载作用下, 拱上各截面的弯矩均为零, 则拱仅仅受到轴力的作用。此时, 各截面都处于均匀受压的状态, 因而材料能得到充分的利用, 相应的拱截面尺寸是最小的。从理论上说, 设计成这样的拱是最经济的, 故称这样的拱轴为合理拱轴。

对于在竖向荷载作用下的三铰拱, 可以利用前面的结论求出合理拱轴, 由任一截面的弯矩为

$$M_D = M_D^0 - H \cdot y_D$$

根据合理拱轴的定义, 各截面上的弯矩为零, 即:

$$M = M^0 - H \cdot y = 0$$

解得:

$$y = \frac{M^0}{H} \quad (3-14)$$

由式(3-14)可知, 合理拱轴的竖向距离 y 与相应的等待梁的弯矩成正比。当拱上的荷载已知时, 只要求出等待梁的弯矩方程, 就可以得到三铰拱的合理拱轴线方程。

【例 3-8】 求图 3.44 所示三铰拱的合理拱轴。

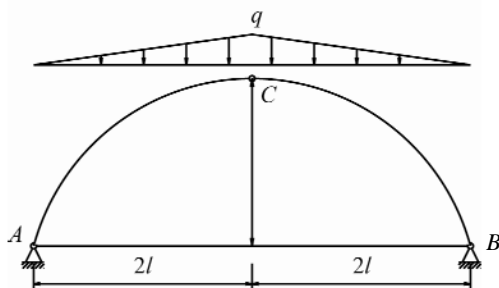


图 3.44

解: 由对称性, $Y_A = Y_B = \int_0^{2l} \frac{qx}{2l} dx = ql$

取左半为研究对象, 由:

$$\sum M_C = 0, \quad Y_A \times 2l - H \times l - \int_0^{2l} \frac{qx}{2l} dx (2l - x) = 0, \quad \text{得 } H = \frac{4ql}{3}$$

由式(3-14)得到合理拱轴方程:

$$y = \frac{M(x)}{H} = \frac{qlx - \frac{qx^3}{12l}}{\frac{4ql}{3}} = \frac{3x}{4} - \frac{x^3}{16l^2}$$

3.5 静定平面桁架

3.5.1 桁架的基本概念与分类

桁架结构指由许多细长杆件通过铰连接而成的空腹形式的结构。它被广泛应用于桥梁、建筑工程和机械工程。图 3.45 所示为工程中所用的桁架的计算简图。

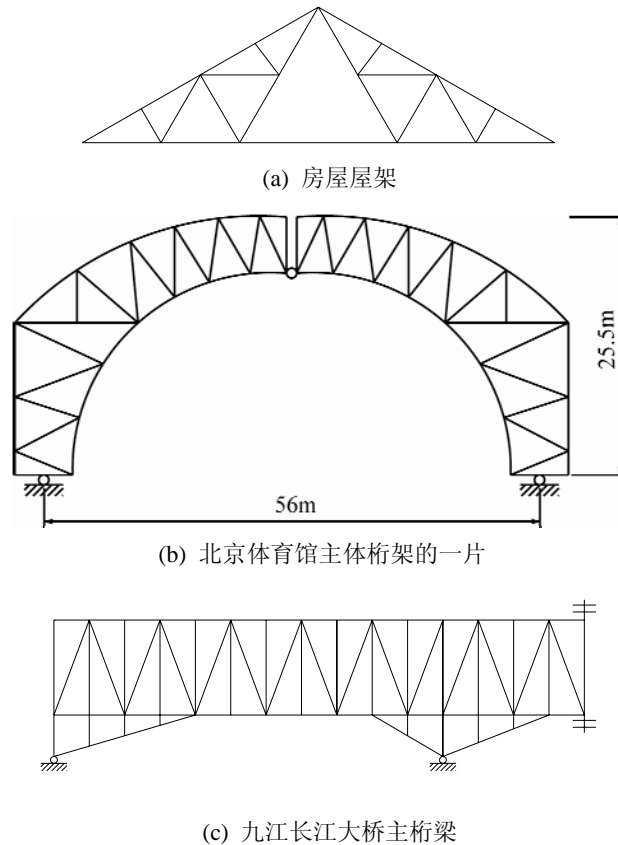


图 3.45 工程中所用的桁架

实际的桁架各杆之间的连接以及所使用的材料多种多样，比如有榫接、螺栓或焊接，它们的实际受力是很复杂的，要对它们进行精确计算很困难。但由于桁架一般都是由比较长细的杆件组成，而且承受的荷载大多数通过其他构件传到结点上，这就使得桁架结点的刚性对于杆件内力的影响大大减小，接近于铰的作用。杆件在荷载作用下，主要承受轴向力，弯矩和剪力很小，可以忽略。所以在实际的工作中，为简化计算，通常对桁架作如下假设。

- (1) 各结点是光滑无摩擦的铰结点连接。
- (2) 各杆轴均为直线，在同一平面内且通过铰的几何中心。
- (3) 荷载作用在结点上，并且都在桁架平面内。

符合上述假设条件的桁架称为理想桁架。桁架中每根杆仅在两端铰接，这样的杆称为链杆或二力杆。由于杆件只受到轴力作用，其横截面上只产生均匀分布的正应力，这样可以使材料充分发挥作用。所以，相对梁来讲，桁架的自重较轻，适用于大跨度结构。

根据桁架的几何构造特点，桁架可以分为3种。

(1) 简单桁架：由铰结三角形出发，依次增加二元体，最后与基础连接，如图 3.46(a) 所示。

(2) 联合桁架：由简单桁架，按两刚片或三刚片法则连接，最后与基础连接，如图 3.46(b) 所示。

(3) 复杂桁架：不属于上两类，无法用两刚片或三刚片法则分析的桁架，如图 3.46(c) 所示。

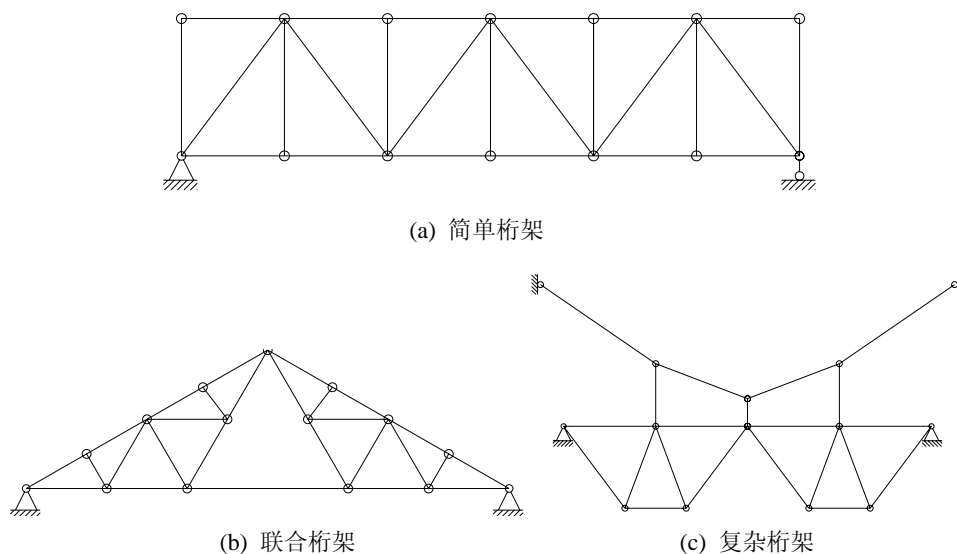


图 3.46 桁架分类

桁架的杆件根据所在位置的不同，分别有不同的定义。上边的各杆称为上弦杆，下边的各杆称为下弦杆，中间各杆称为腹杆，弦杆上相邻两结点间称为节间，间距称为节间长度。两支座的水平间距称为跨度，垂直间距称为桁高，如图 3.47 所示。

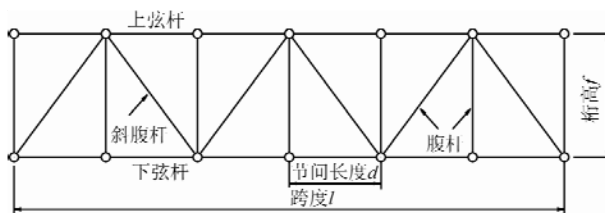


图 3.47

3.5.2 结点法

为了求得桁架各杆的内力，截取桁架中的一个结点作为研究对象，利用平衡条件解出

杆的内力。这种方法叫结点法。

原则上,只要截取的结点有不多于两个未知力,均可用结点法。但由于结点有两个自由度,仅能建立两个平衡方程,所以结点法一般应用于简单桁架,且按与简单桁架增加二元体的反向截取结点,可保证每个结点仅有两个未知力。

在建立平衡方程时,通常把杆轴力分解为水平分力 N_x 和竖向分力 N_y ,在图 3.48 中,力三角形和几何三角形具有相似关系,由相似定理,可以得到

$$\frac{N}{l} = \frac{N_y}{l_y} = \frac{N_x}{l_x}$$

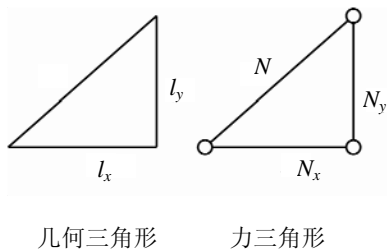


图 3.48

在同一结点的所有内力为未知的各杆中,除某一杆外,其余各杆都共线,则该杆称为此结点的单杆。关于结点的单杆这类特殊杆件,有下面几种情况。

(1) 连接两根不共线杆的结点,若该结点上无荷载作用,则此两杆的轴力为零。(二元体上无结点荷载,该两杆不受力),如图 3.49(a)所示。

(2) 连接三根杆的结点上无荷载,且其中两根杆共线,则另一杆必为零轴力杆。如图 3.49(b)所示。

(3) X 形连接杆件的受力特点,如图 3.49(c)所示。

(4) K 形连接杆件的受力特点,如图 3.49(d)所示。

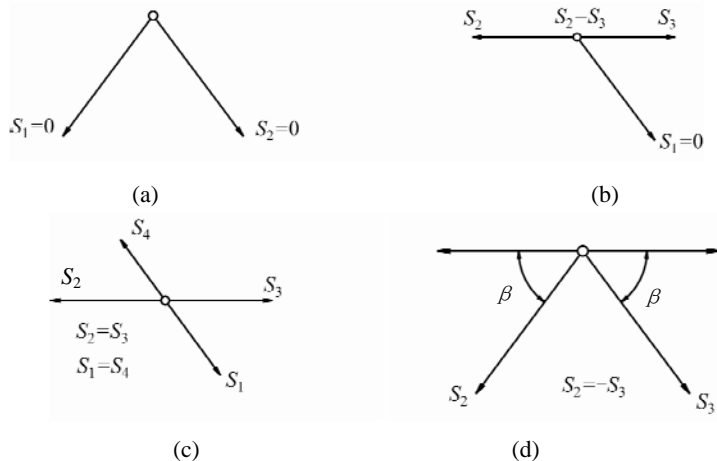


图 3.49 特殊杆件

【例 3-9】 计算图 3.50 中桁架各杆内力。

解: (1) 求支座反力, $X_1=80\text{kN}$ (向右), $Y_2=-40\text{kN}$ (向下), $Y_1=120\text{kN}$ (向上)

(2) 利用特殊杆件结论, 先找零杆, 有 $N_{67}=0$, $N_{63}=0$ 。

(3) 取结点 8 为研究对象, 画出受力图, 如图 3.51(a)所示。其中未知轴力均表示为正方向。

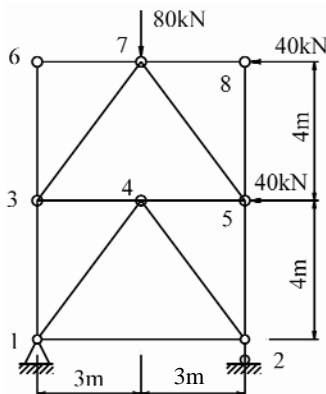


图 3.50

由 $\sum X=0$, $N_{87}+40=0$, 得 $N_{87}=-40\text{kN}$

$\sum Y=0$, 得 $N_{85}=0$

(4) 再取结点 7 为研究对象, 画出受力图, 如图 3.51(b)所示。由:

$\sum X=0$, $N_{73x}+40=N_{75x}$

$\sum Y=0$, $N_{73y}+N_{75y}+80=0$

由于 $\frac{N_{73x}}{N_{73y}}=\frac{N_{75x}}{N_{75y}}=\frac{3}{4}$, 联立上述两式得:

$N_{73x}=-50\text{kN}$, $N_{75x}=-10\text{kN}$

(5) 再取结点 3 为研究对象, 画出受力图, 如图 3.51(c)所示。由:

$\sum X=0$, $N_{34}=N_{37x}=50\text{kN}$

$\sum Y=0$, $N_{31}=-N_{37y}=-\frac{200}{3}\text{kN}$

(6) 再取结点 5 为研究对象, 画出受力图, 如图 3.51(d)所示。由:

$\sum X=0$, $N_{54}=-30\text{kN}$

$\sum Y=0$, $N_{52}=-\frac{40}{3}\text{kN}$

(7) 再取结点 4 为研究对象, 画出受力图, 如图 3.51(e)所示。由于结点 4 为一 K 形结点, 所以有 $N_{41}=-N_{42}$, 由:

$\sum X=0$, $N_{41x}=-N_{42y}=-40\text{kN}$

(8) 再取结点 2 为研究对象, 画出受力图, 如图 3.51(f)所示。由:

$\sum X=0$, $N_{21}=-40\text{kN}$

$\sum Y=0$, $-\frac{40}{3}+\frac{160}{3}-40=0$, 校核无误。

(9) 作出轴力图, 如图 3.51(g)所示。

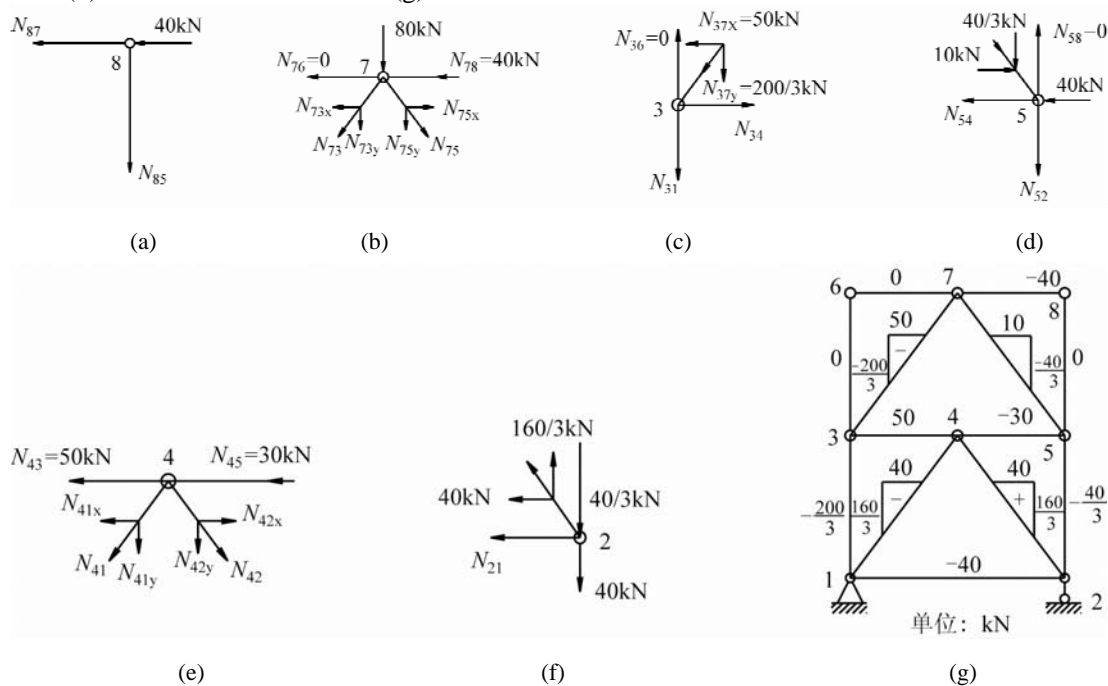


图 3.51

3.5.3 截面法

在求桁架各杆的内力时, 如果截取桁架中两个以上结点作为研究对象, 利用平衡条件解出杆的内力。这种方法叫截面法。

由于截面法所取研究对象有 3 个自由度, 所以能建立 3 个平衡方程, 每次可以求取 3 个未知力。

截面法截得的各杆中, 除某一根杆外, 其余各杆都交于同一点或彼此平行, 则此杆为截面单杆, 如图 3.52(a)~图 3.52(c)中的 a 杆。

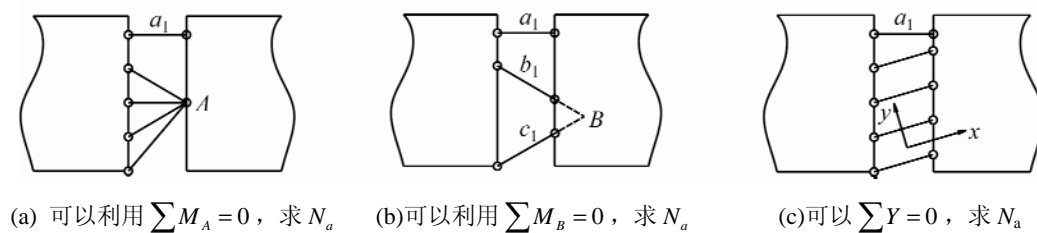


图 3.52 截面单杆

【例 3-10】 求图 3.53 中指定杆 1、2 及 3 的轴力。

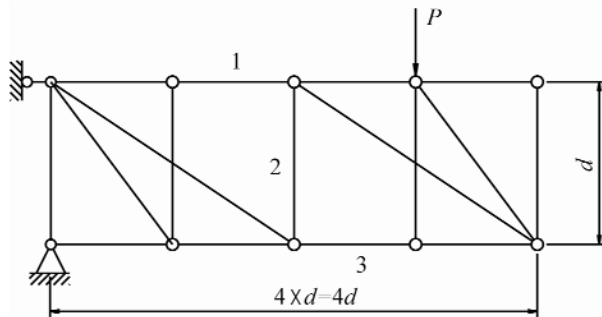


图 3.53

解: (1) 取 I-I 截面, 取右半部分为研究对象, 如图 3.54(b)所示。

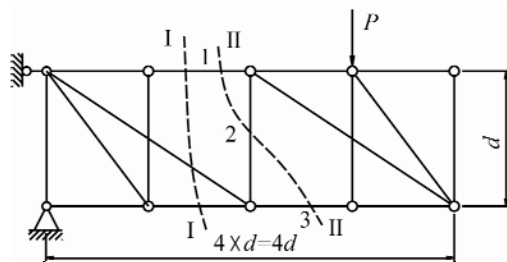
由 $\sum M_A = 0$, $N_1 \cdot d = P \cdot d$ 得 $N_1 = P$ (拉力)

(2) 取 II-II 截面, 取右半部分为研究对象, 如图 3.54(c)所示。

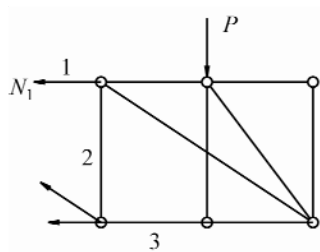
由 $\sum Y = 0$, $N_2 = -P$ (压力)

$\sum M_B = 0$, $N_3 \cdot d + P \cdot d = 0$ 得 $N_3 = -P$ (压力)

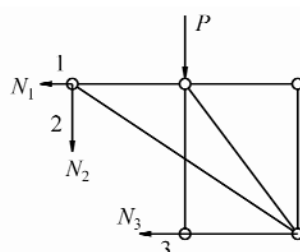
经校核无误。



(a)



(b)



(c)

图 3.54

3.5.4 结点法和截面法的联合应用

在求解桁架时, 不必拘泥于哪一种方法, 只要能快速求出杆件的轴力, 就是行之有效的方法。所以, 有时联合应用结点法和截面法更为方便。

在联合应用结点法和截面法求解桁架时, 只要能简单、快捷求出内力, 二者不必分先后。在取隔离体时, 应尽量避免求解联立方程和未知力臂。

【例 3-11】 求图 3.55 中指定杆 1、2 和 3 的轴力。

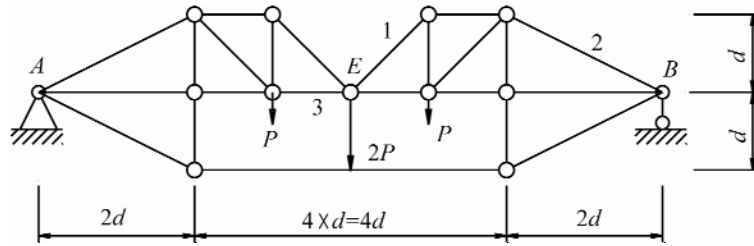


图 3.55

解: (1) 几何构造分析。

(2) 以整体为研究对象, 求支反力, 由对称性

$$Y_A = Y_B = 2P, \quad X_A = 0$$

(3) 由于结点 E 为“K”结点, 两根斜杆轴力相同。取结点 E 为研究对象, 受力图如图 3.56(a) 所示。

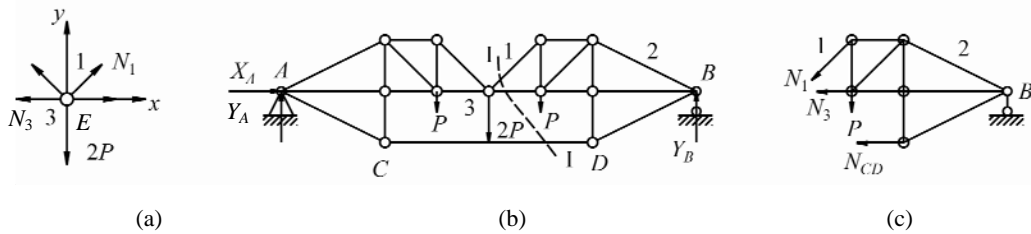


图 3.56

由 $\sum Y = 0$, $2N_{1y} = 2P$, 得 $N_{1x} = P$

由相似关系可得 $N_1 = \sqrt{2}P$ (拉力), $N_{1x} = P$

(4) 取 I-I 截面, 取右半部分为研究对象, 受力图如图 3.56(c) 所示。

由 $\sum M_E = 0$, 得 $N_{CD} = 7P$ (拉力)

$\sum X = 0$, $N_{1x} + N_3 + N_{CD} = 0$, 得 $N_3 = -8P$ (压力)

(5) 取 II-II 截面, 取右半部分为研究对象, 受力图如图 3.57(b) 所示。

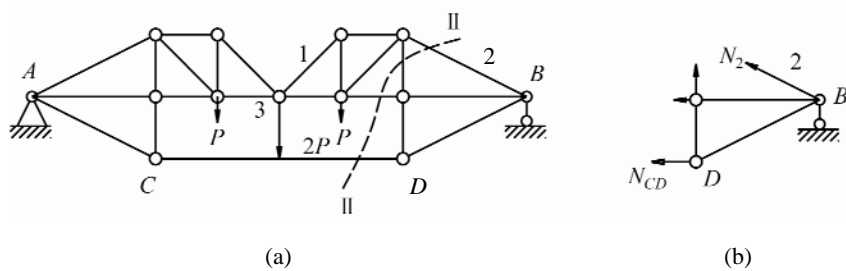


图 3.57

由 $\sum M_F = 0$, $N_{2y} \cdot 2d + 2P \cdot 2d = N_{CD} \cdot d$ 得 $N_{2y} = 3P/2$

由相似关系, $N_2 = \frac{3\sqrt{5}}{2}P$ (拉力)

经校核无误。

3.6 组 合 结 构

组合结构的特点及计算过程如下。

- (1) 由链杆及梁式杆构成, 如图 3.58 所示。
- (2) 先计算链杆的轴力, 后计算梁式杆的内力。
- (3) 截面法时, 避免截断梁式杆(受弯杆)。

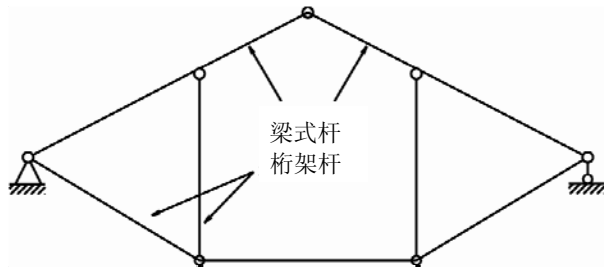


图 3.58 组合结构示例

【例 3-12】 作图 3.59 所示结构内力图。

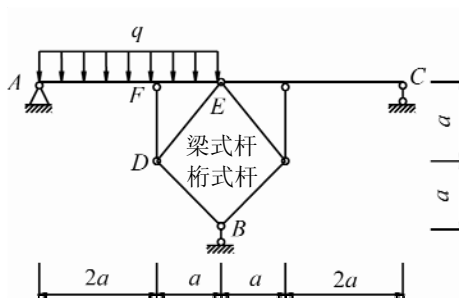


图 3.59

解: (1) 取结点 B 为研究对象, 受力图如图 3.60 所示。

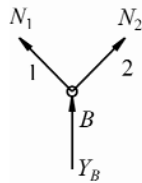


图 3.60 B点受力图

由 $\sum X = 0$, 得 $N_1 = N_2$

由 $\sum Y = 0$, 得 $Y_B + 2N_{1y} = 0$, 即

$$Y_B + \sqrt{2}N_1 = 0 \quad (1)$$

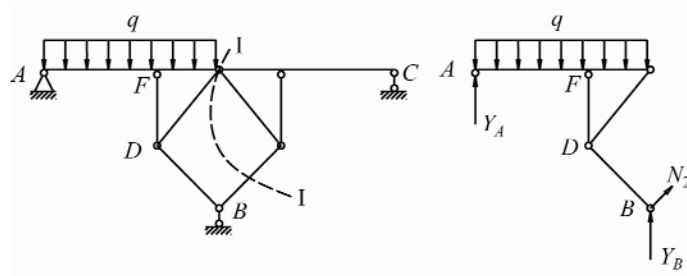


图 3.61

(2) 取 I-I 截面，取左半部分为研究对象，受力图如图 3.61 所示，由：

$$\sum M_C = 0, \quad Y_A \cdot 3a - \frac{1}{2}q(3a)^2 - N_1 \cdot \sqrt{2}a = 0, \quad \text{得:}$$

$$3Y_A - \sqrt{2}N_1 = 4.5qa \quad (2)$$

(3) 取整体为研究对象，

$$\text{由 } \sum M_C = 0, \quad Y_A \cdot 6a + Y_B \cdot 3a - 3qa \cdot 4.5a = 0, \quad \text{即:}$$

$$2Y_A + Y_B = 4.5qa \quad (3)$$

联立(1)、(2)、(3)式，解得

$$Y_A = 0, \quad Y_B = 4.5qa \text{ (向上)}, \quad N_1 = N_2 = -\frac{9\sqrt{2}}{4}qa \text{ (压力)}$$

$$\text{由 } \sum Y = 0, \quad \text{得 } Y_D = -1.5qa \text{ (向下)}$$

(4) 取 D 结点为研究对象，受力图如图 3.62 所示，由：

$$N_{DF} = -4.5qa \text{ (压力)}, \quad N_{DE} = \frac{9\sqrt{2}}{4}qa \text{ (拉力)}$$

经校核无误。

(5) 作出内力图，如图 3.63 所示。

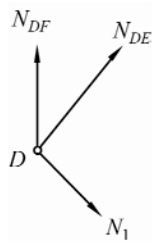


图 3.62

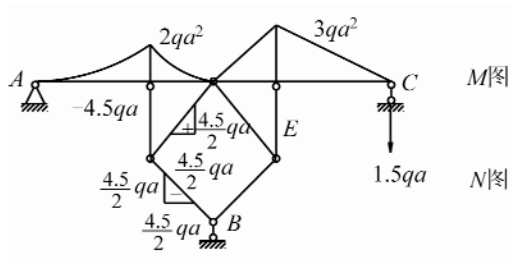


图 3.63

3.7 静定结构受力特性

静定结构和超静定结构都是几何不变体系，由于静定结构是无多余约束的，所以静定

结构的内力可以完全由静力平衡条件确定。得到的解答是唯一的。

由此可知静定结构的基本静力特性就是满足平衡条件的内力解答的唯一性，其受力特性，都是在此基础上派生出来的。

(1) 静定结构的反力和内力与结构所用材料的性质、截面的大小和形状都没有关系。

(2) 温度改变、支座移动和制造误差等因素在静定结构中不引起内力。

例如在图 3.64(a)中，简支梁由于支座 B 下沉只会引起刚体位移(如虚线所示)，而在梁内并不引起内力；图 3.64(b)中，设三铰拱的杆 BC 因施工误差稍有缩短，拼装后结构形状略有改变(如虚线所示)，但三铰拱内不会产生内力；图 3.64(c)中，悬臂梁上下侧存在温差，由于其可以自由地产生弯曲变形(如虚线所示)，所以梁内不会产生内力。这些结论都可以利用静力平衡条件证明，因为在结构上没有荷载作用，所以由平衡条件求得的支座反力为零，相应的内力也为零。

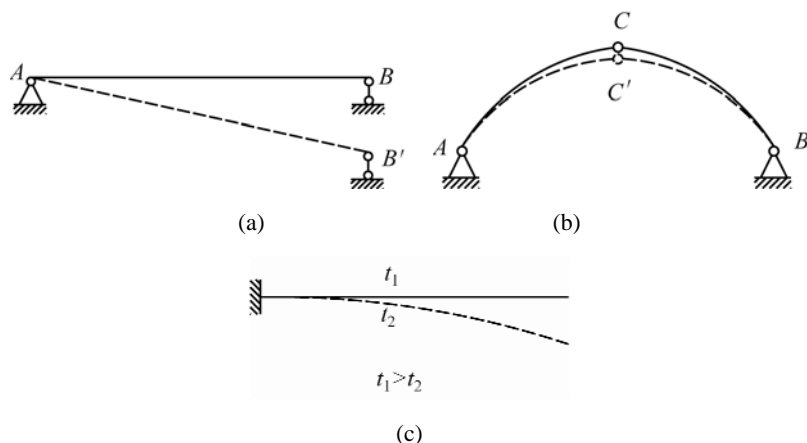


图 3.64 支座移动和温度改变

(3) 静定结构的局部平衡特性。

如果一组平衡力系作用在静定结构上某一几何不变部分，则只会使该部分产生内力外，其余部分不会产生内力，如图 3.65 所示，一对平衡力系作用在桁架的 AB 杆上，则其余部分的反力和内力均为零。可分别由平衡条件 $\sum X = 0$ ， $\sum Y = 0$ ， $\sum M_A = 0$ 得到 $X_A = Y_A = Y_B = 0$ ，再由结点法可以得到除 AB 杆外，其余各杆均为零杆。

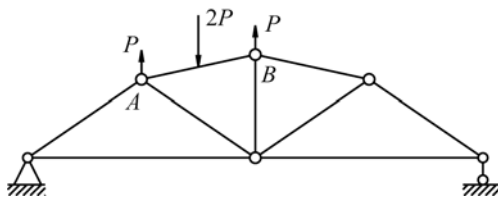


图 3.65 局部平衡特性

(4) 静定结构的荷载等效特性。

当静定结构的一个内部几何不变部分上的荷载作等效变换时，其余部分的内力不变。这里，等效荷载是指荷载分布虽不同，但其合力彼此相等的荷载。

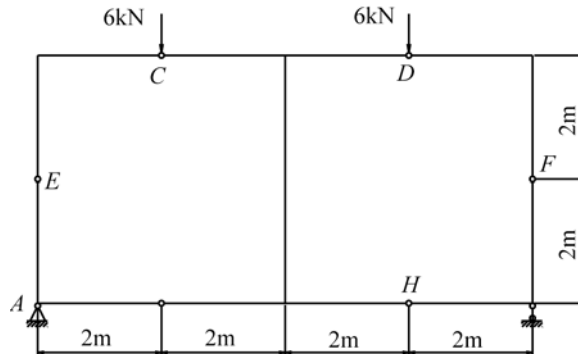
(5) 静定结构的构造变换特性。

当静定结构的一个内部几何不变部分作构造变换时，其余部分的内力不变。

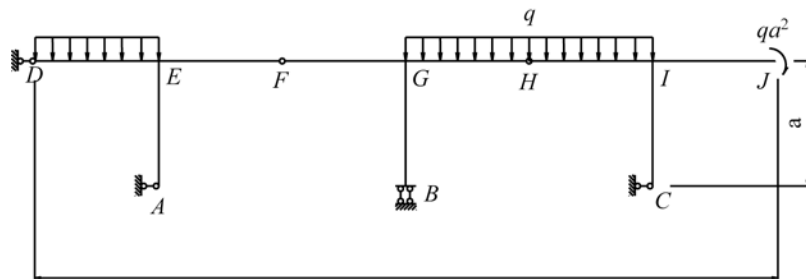
3.8 习 题

1. 作出以下各图的弯矩图。

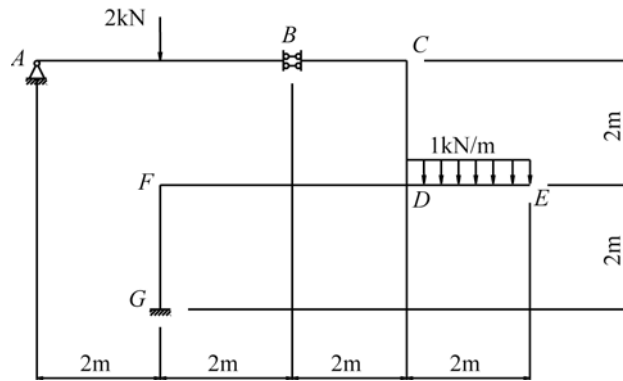
(1)



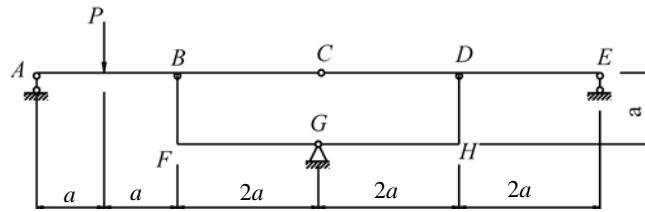
(2)



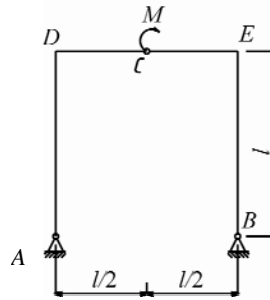
(3)



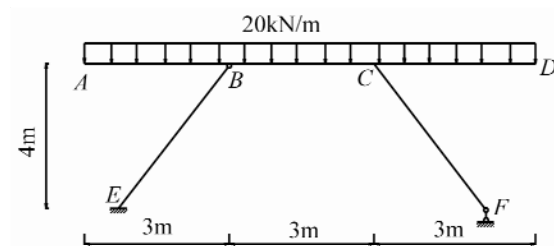
(4)



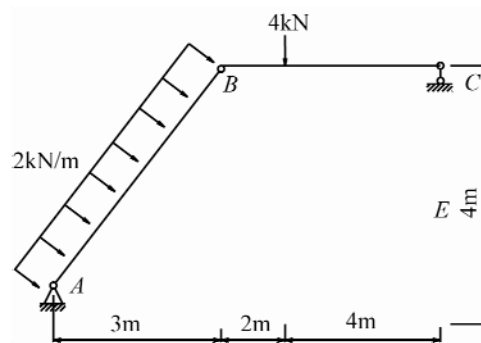
(5)



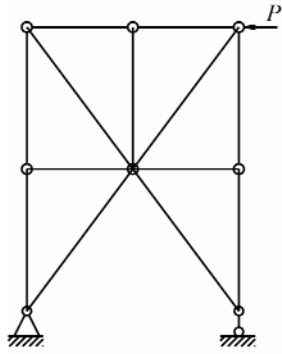
(6)



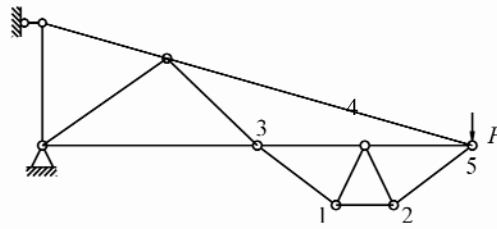
2. 作内力图。



3. 找出所有零杆。

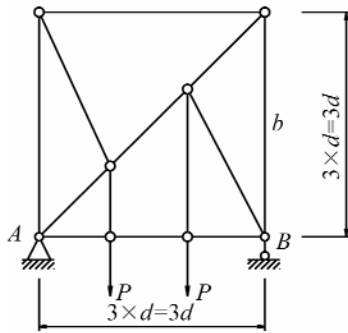


(a)

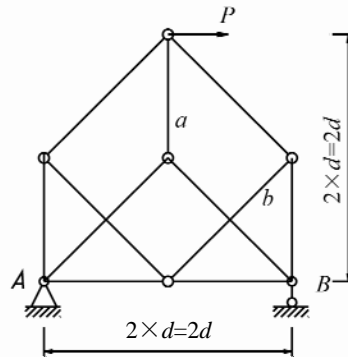


(b)

4. 求 N_b 。

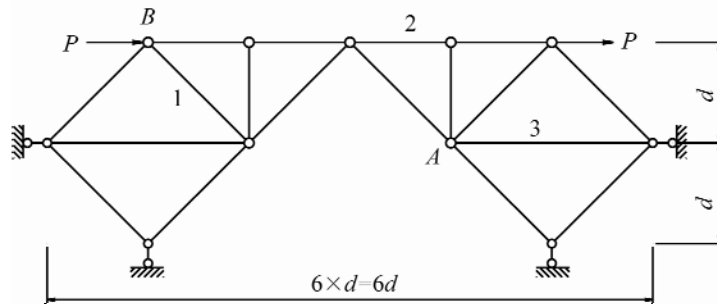


(a)

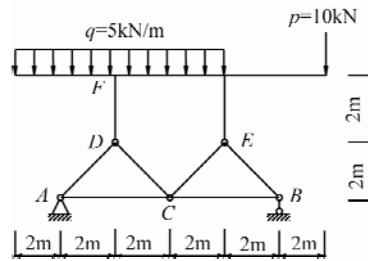


(b)

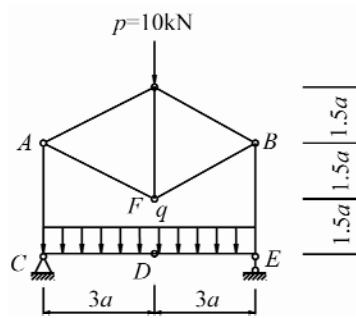
5. 求指定杆的轴力 N_1 、 N_2 及 N_3 。



6. 作图示结构内力图。



7. 作图示结构内力图。



8. 作图示结构内力图。

